МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Куссев Андрей Станиславович**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты AB2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Кукиев Андрей ~~11А~~

Вариант 3

$\boxed{1}$ Обозначим геом. пр-ию за $\{b_n\}$ с первым членом $b_1 = b$ и знам-ем $q \Rightarrow b_{n+1} = bq^n$

По усл:

$$\left\{\begin{array}{l} b + bq + bq^2 + bq^3 = 120 = 30 \cdot 4 \\ bq^2 + bq^3 + bq^4 + bq^5 = 120 \cdot 4 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$b + bq + bq^2 + bq^3 = q^2\left(\frac{b + bq + bq^2 + bq^3}{4}\right)$$

$$\cancel{120} = q^2 \cdot \frac{\cancel{120}}{4}; \quad q^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = -2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} b + 2b + 4b + 8b = 120 \\ b - 2b + 4b - 8b = 120 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 15b = 120 \\ -5b = 120 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} b = 8 \text{ при } q = 2 \\ b = -24 \text{ при } q = -2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} b_4 = bq^3 = 8 \cdot 8 = 64 \\ b_4 = bq^3 = -24 \cdot (-8) = 192 \end{array}\right.$$

Ответ: 64 или 192.

12) Переведём градусы в правой части в радианы:

$$\sin(\pi x) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{180}x\right)$$

по условию равенства синусов:

$$\left[\begin{array}{l} \pi x - \frac{\pi x}{90} = 2\pi n \\ \pi x + \frac{\pi x}{90} = \pi + 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{180n}{89} \\ x = \frac{90}{91} + \frac{180k}{91} \end{array}\right., \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Расст. между корнями в одной серии — $\frac{180}{89}$ и $\frac{180}{91}$ соотв. Посмотрим, можно ли улучшить результат:

$$\frac{180n}{89} - \frac{180k}{91} - \frac{90}{91} = t,$$ где t – близ. к нулю число (но не равное ему)

$$2(91n - 89k) = \frac{89}{90}(91t + 90)$$

Если t – близ. к нулю число, то $91t + 90$ ближе всего к 90, тогда пр. ч. ближе всего к 89. Но пр. ч. = лев. ч. $\in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{лев. ч.} = 88 \\ \text{лев. ч.} = 90 \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} 91n - 89k = 44 \\ 91n - 89k = 45 \end{array}\right.$$ Вообще, данные диофант. ур-ие всегда имеют решения, но на всякий случай приведу примеры:

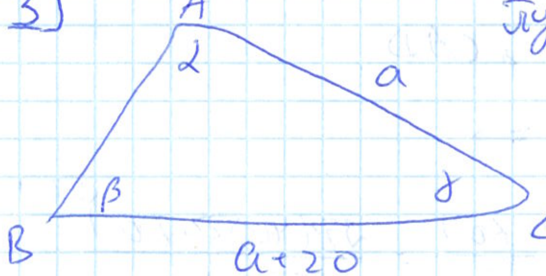
$$\left[\begin{array}{l} 91n - 89k = 44 \text{ при } n = k = 22 \\ 91n - 89k = 45 \text{ при } n = -22, k = -23 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{пр. ч.} = 88 \\ \text{пр. ч.} = 90 \end{array}\right.; \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} t = \frac{90^2 - 90\cdot 89}{89\cdot 91} = 90\cdot\frac{1}{89\cdot 91} < \frac{180}{91} \\ t = \frac{90\cdot 88 - 90\cdot 89}{89\cdot 91} = 90\cdot\left(-\frac{1}{89\cdot 91}\right) \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{90}{89\cdot 91}$

3)



Пусть в $\triangle ABC$ $BC > AC > AB \Rightarrow$ $BC = AC + 20 = a + 20$; $\alpha > \beta > \gamma$

Из этого следует, что второе условие задачи имеет 3 случая:

1) $\alpha = 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\gamma = 3\beta > \beta \\ \gamma = 3\alpha > \alpha\end{array}\right. - \varnothing$

2) $\alpha = 2\gamma \Rightarrow \beta = 3\gamma > 2\gamma = \alpha - \varnothing$

3) $\beta = 2\gamma \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = 3\beta \\ \alpha = 3\gamma\end{array}\right.$

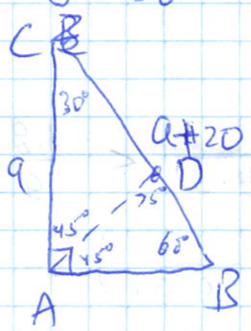
Всего 2 ситуации!

1. $\alpha = 3\beta = 6\gamma$; $\beta = 2\gamma \Rightarrow 6\gamma + 2\gamma + \gamma = 180°$;

$\gamma = 20° \Rightarrow \beta = 40°$; $\alpha = 120°$

2. $\alpha = 3\gamma$; $\beta = 2\gamma \Rightarrow 3\gamma + 2\gamma + \gamma = 180°$;

$\gamma = 30° \Rightarrow \beta = 60°$; $\alpha = 90°$



$\Rightarrow \dfrac{a}{a+20} = \sin\angle\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2a = \sqrt{3}a + 20\sqrt{3}$;

$a = \dfrac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{1} =$

$= 40\sqrt{3} + 60$

Пусть AD – бис. $\Rightarrow \angle CAD = 45° \Rightarrow$

по т. син-ов для $\triangle CAD$:

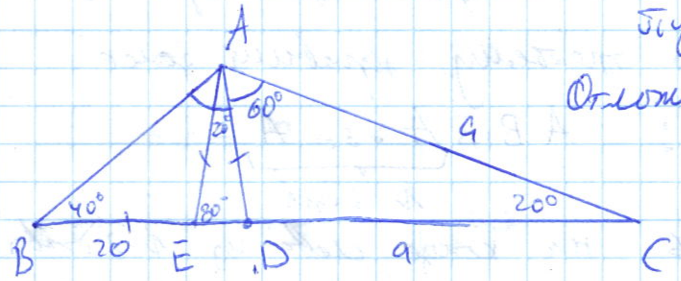
$\dfrac{AD}{\sin 30°} = \dfrac{a}{\sin(30°+45°)} \Rightarrow$

$AD = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(40\sqrt{3}+60)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(40\sqrt{3}+60)^{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(120 - 40\sqrt{3} + 60\sqrt{3} - 60) = 30\sqrt{2} + 10\sqrt{6}$.

Кусеев Андрей

$\boxed{3}$ Теперь дорешаем ~~...~~ 1-ую ситуацию:



пусть AD – бис.
Отложим на BC т. E такую, что $\angle EAC = 80^\circ \Rightarrow$

$\angle AEC = 80^\circ \Rightarrow \triangle AEC$ – р/б; $EC = AC = a \Rightarrow$
$BE' = 20$

$\angle BEA = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \Rightarrow \angle BAE = 180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \triangle BEA$ – р/б; $BE = AE = 20$.

$\angle EAD = \angle EAC - \angle DAC = 20^\circ \Rightarrow$

$\angle EDA = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ \Rightarrow$

$\triangle EAD$ – р/б; $AD = AE = 20$.

Ответ: 20 или $30\sqrt{2} + 10\sqrt{6}$

$\boxed{5}$ Рассм. $f(N)$, опред. при натур. x и равную кол-во N-буквенных слов.

Пусть $N \geq 4$. Как может вести себя послед-ть после первой буквы?

~~...~~ По 2-ому правилу вторая буква – всегда „B". Как можно дальше продолжить посл-ть? ~~Далее~~

1. Далее может идти ещё одна буква „В", но по третьему правилу далее идёт „А": $ABB\underbrace{A\ldots A}_{N-3 \text{ букв}}$

подпосл-ть на конце слова из $N-3$ букв — это $(N-3)$-букв. слово, их $f(N-3)$ штук.

2. Далее идёт буква А:

$AB\underbrace{A\ldots A}_{N-2 \text{ букв}}$ - заканч. посл-ть

$(N-2)$-букв. словом, их — $f(N-2)$

Итого: $f(N) = f(N-3) + f(N-2)$ при $N \geq 4$, $f(N)$ при $N < 4$ можно посчитать самим. Составим таблицу из значений:

$f(1) = 1$ (A)
$f(2) = 1$ (AA)
$f(3) = 1$ (ABA)
$f(4) = f(1) + f(2) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = 3$
$f(7) = 4$
$f(8) = 2 + 3 = 5$
$f(9) = 3 + 4 = 7$
$f(10) = 4 + 5 = 9$
$f(11) = 5 + 7 = 12$
$f(12) = 7 + 9 = 16$
$f(13) = 9 + 12 = 21$
$f(14) = 12 + 16 = 28$
$f(15) = 16 + 21 = 37$
$f(16) = 21 + 28 = 49$
$f(17) = 28 + 37 = 65$
$f(18) = 37 + 49 = 86$
$f(19) = 49 + 65 = 114$
$f(20) = 65 + 86 = 151$
$\boxed{f(21) = 86 + 114 = 200}$

Ответ: 200.

$\boxed{4}$ Пусть у этого ур-ие два целых корня y, z и какой-то корень $\frac{k}{3}$.

По т. Виета: $-a - \frac{4}{3} = y + z + \frac{k}{3} \Rightarrow$

$\frac{k+4}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$ и $k \equiv_3 2$

Также по т. Виета: $\frac{a-2}{3} = yz \cdot \frac{k}{3} \Rightarrow$

$yz = \frac{a-2}{k} \in \mathbb{Z}$; $a - 2 \in [-8; 3] \Rightarrow$

$-9 < k < 9 \xRightarrow{k \equiv_3 2} k = \{8; 5; 2; -1; -4; -7\}$

Рассм. эти случаи!

1) $k=8 \Rightarrow yz=\frac{a-2}{8}$. т.к. $a-2\in[-8;3]$, то:

$\left[\begin{array}{l} a-2=-8 \\ a-2=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=-6 \\ a=2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} yz=-1 \\ y+z=-6-4=\cancel{-10}\ 2 \end{cases} \\ \begin{cases} yz=0 \\ y+z=-6 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y,z\text{ - корни } t^2-2t-1=0 \Rightarrow y;z\notin\mathbb{Z} \text{ (не уд. усл.)} \\ y,z\text{ - корни } t^2+6t=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=-6 \end{cases} \text{ - уд. усл.} \end{array}\right.$

$\Rightarrow a=2$ подходит

2) $k=5 \Rightarrow yz=\frac{a-2}{5}\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} a-2=-5 \\ a-2=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=-3 \\ a=2 \text{ - уже разобрано} \end{array}\right.$;

$\begin{cases} yz=-1 \\ y+z=3-3=0 \end{cases} \Rightarrow y=1;\ z=-1 \Rightarrow$ подходит $a=-3$

3) $k=2$; $yz=\frac{a-2}{2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=-8 \text{ - ~~разобрано~~} \\ a-2=-6 \\ a-2=-4 \\ a-2=-2 \\ a-2=0 \text{ - раз-но} \\ a-2=2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=-6 \\ a=-4 \\ a=-2 \\ a=0 \\ a=4 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} yz=-4;\ y+z=-8 - \varnothing \\ yz=-3;\ y+z=2 \\ yz=-2;\ y+z=0 - \varnothing \\ yz=-1;\ y+z=-2 - \varnothing \\ yz=1;\ y+z=-6 - \varnothing \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ корни $3;-1$ $\Downarrow$ $a=-4$ - подходит

4) $k=-1 \Rightarrow y+z=-a-1$; $yz=\cancel{a}\ 2-a \Rightarrow$

y,z - корни $t^2+t(a+1)+(2-a)=0$;

$D=a^2+2a+1-8+4a=a^2+6a-7=n^2$, где $n\in\mathbb{Z}$; $n\neq0$

~~$(n-0)(n+a)=6a-7$; $(a+7)(a-1)=n^2 \Rightarrow a+1<0, a\neq1$~~

Кусиев

$\boxed{4}$ $a=-6: \; -13\cdot(-5) \neq n^2$

$a=-5: \; -12\cdot(-4) \neq n^2$

$a=-4: \; -11\cdot(-3) \neq n^2$

$a=-3: \; -10\cdot(-2) \neq n^2$

$a=-2: \; -9\cdot(-1) = 3^2 \Rightarrow t^2 - t + 4 = 0$

$a=-1: \; -8\cdot(0) \neq n^2 \quad = 0$

$\underbrace{(a+7)}_{>0}(a-1) = n^2 \Rightarrow a-1>0; \; a>1$

$a=2: \; 9\cdot 1 = 3^2 \Rightarrow t^2+3t=0; \; \begin{cases} y=0 \\ z=-3 \end{cases}$ – под-т

$a=3: \; 10\cdot 2 \neq n^2$

$a=4: \; 11\cdot 3 \neq n^2$

$a=5: \; 12\cdot 4 \neq n^2$

5) $k=-4: \; yz = \frac{a-2}{-4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} a-2=-8 \\ a-2=-4 \\ a-2=4 \\ a-2=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} a=-6 \\ a=-2 \\ a=6 \\ a=2 \text{ – разоб-но} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} yz=2,\ y+z=6 - \varnothing \\ yz=1,\ y+z=2 \Rightarrow y=z - \varnothing \\ yz=-1,\ y+z=-6 - \varnothing \end{array}\right.$

6) $k=-7: \; \frac{a-2}{-7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-2=-7; \; a=-5$

$yz=1; \; y+z=6 - \varnothing$

Итого, подходят:

$a = 2; -3; -4$, т.е. три числа из 12

$\Rightarrow$ вер-ть равна $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Ответ: 0,25.