МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бурьяноватая Ксения Евгеньевна**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Задача 1.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}=15 \\ \dfrac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4}=60 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3=60 \\ b_1q^2+b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5=240 \,\Big|: q^2 \; (q\neq 0) \end{cases}$$

$$b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3=\frac{240}{q^2}=60 \Rightarrow q^2=4 \quad q=2 \text{ или } q=-2$$

$q=2$

$b_1+2b_1+4b_1+8b_1=60$

$15b_1=60$

$b_1=4$

$b_6=q^5b_1=4\cdot 32=128$

$q=-2$

$b_1-2b_1+4b_1-8b_1=60$

$-5b_1=60$

$b_1=-12$

$b_6=b_1q^5=-12\cdot(-32)=384$

Ответ: $b_6=128$ или $b_6=384$

1

Задача 2.

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$$

$$3x^\circ = \frac{3x\pi}{180}$$

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{x\pi}{60}\right)$$

I

$$\pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{120k}{59}$$

II

$$\pi x = \pi - \frac{\pi x}{60} + 2\pi n$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{60(1+2n)}{61}$$

Возможно 3 варианта: минимальное расстояние между корнями типа I и I; II и II; I и II

1) I и I

$$r_1 = \left|\frac{120k_1}{59} - \frac{120k_2}{59}\right| = \frac{120}{59}|k_1 - k_2| \quad (k_1 \neq k_2)$$

т.к. k - целое $\Rightarrow |k_1 - k_2|_{min} = 1$

$$\Rightarrow \min(r_1) = \frac{120}{59}$$

2) II и II

$$r_2 = \left|\frac{60(1+2n_1)}{61} - \frac{60(1+2n_2)}{61}\right| = \frac{60}{61}|1+2n_1-1-2n_2| = \frac{120}{61}|n_1 - n_2|$$

т.к. ~~k~~ целое и $n_1 \neq n_2 \Rightarrow |n_1 - n_2|_{min} = 1$

$$\Rightarrow \min(r_2) = \frac{120}{61}$$

3) I и II

$$r_3 = \left|\frac{120k}{59} - \frac{60(1+2n)}{61}\right| = 60\left|\frac{122k-59-118n}{59\cdot 61}\right| = \frac{60}{59\cdot 61}|122k-59-118n|$$

нужно найти минимальное значение $|122k-59-118n|$

k и n - целые $\Rightarrow$ это значение целое

Пусть это 0, тогда $122k = 59 + 118n$

такого быть не может, т.к. $\Leftarrow$ $122k$ - четное 59 - нечетное $118n$ - четное

(л.ч. всегда чет.; п.ч. всегда нечет.)

Следующее возможное значение 1 достигается при

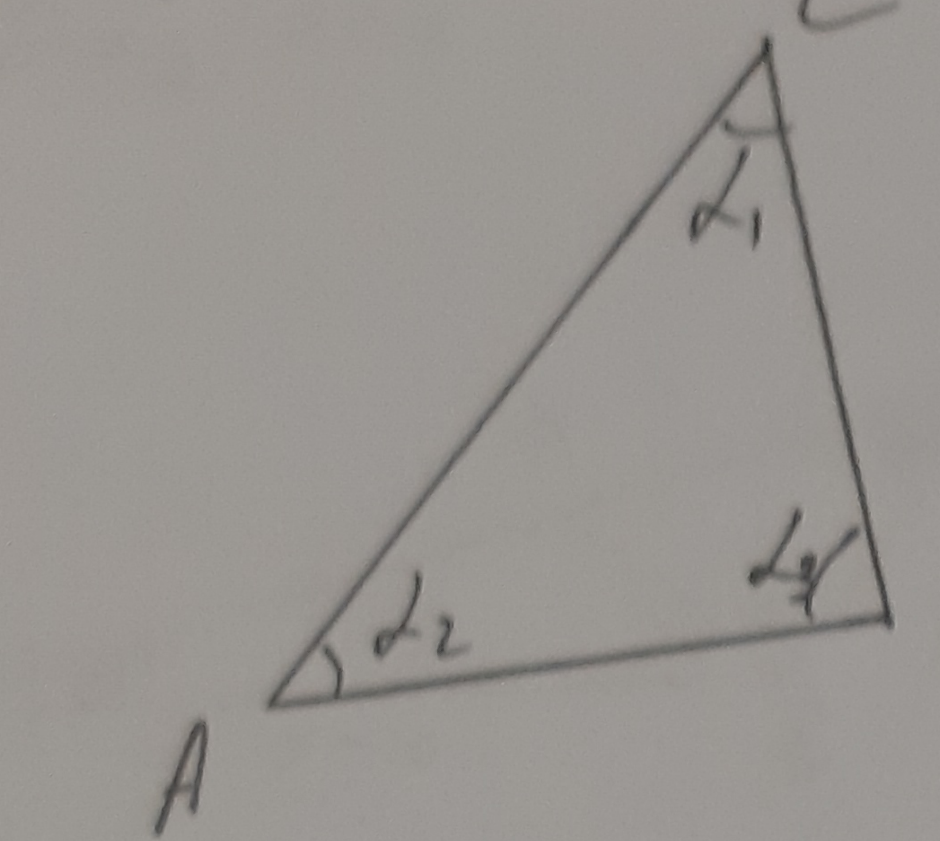
$k = n = 15$ $\quad |122\cdot 15 - 59 - 118\cdot 15| = |15(122-118) - 59| =$

$$= |15\cdot 4 - 59| = 1$$

$$\Rightarrow \min(r_3) = \frac{60\cdot 1}{59\cdot 61} = \frac{60}{3599} < r_2 < r_1$$

Ответ: $\min(r) = \dfrac{60}{3599}$

Задача 3



Дано: $\angle_1 = 2\angle_2$

$\angle_3 = 3\angle_2$ или $\angle_3 = 3\angle_1$

~~AC - на~~ $AC > AB > BC$

$AB = AC - 10$

Найти: бис. $\angle_3$

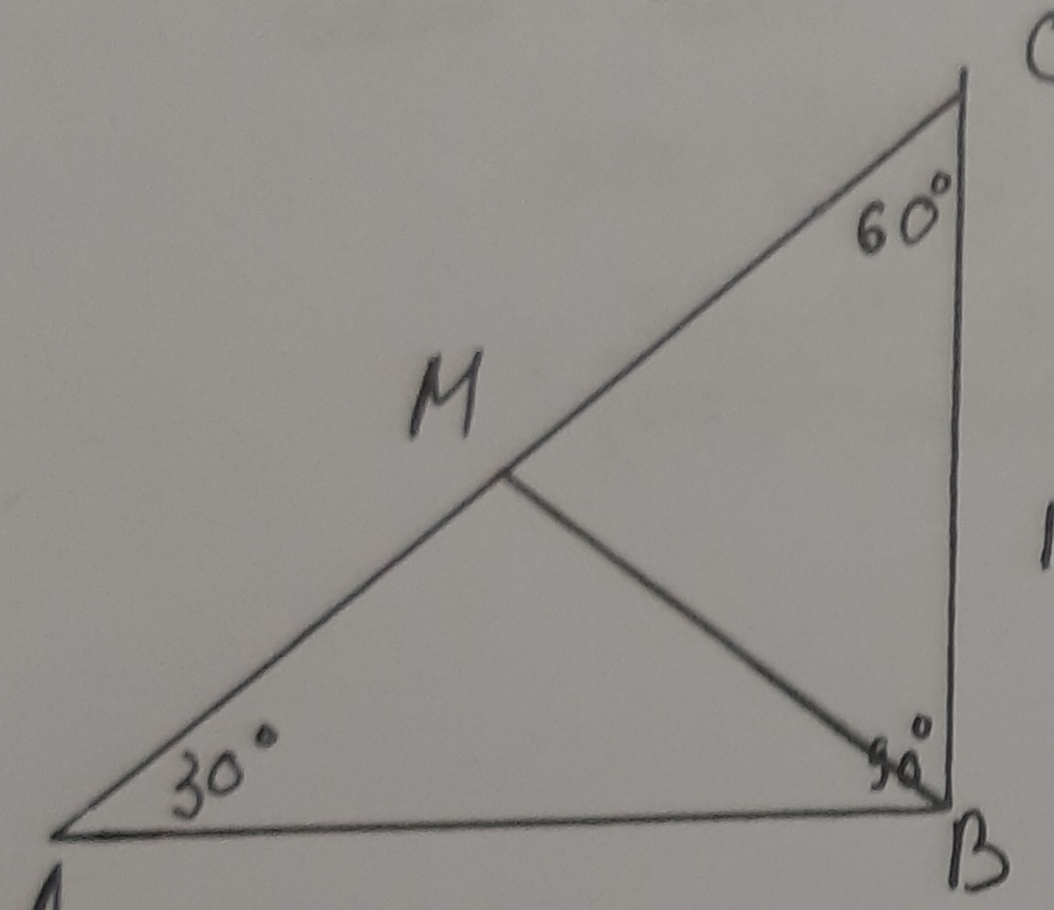
Напротив большего угла лежит большая сторона

$\angle_3 > \angle_2$ и $\angle_3 > \angle_1$ в любом случае

$\Rightarrow \angle_3$ наибольший $\Rightarrow \angle_3 = \angle ABC$

$\angle_1 = 2\angle_2 \Rightarrow \angle_1 > \angle_2 \Rightarrow \angle_1 = \angle ACB \Rightarrow \angle_2 = \angle CAB$

① $\angle_3 = 3\angle_2$



$180 = \angle_1 + \angle_2 + \angle_3 = 2\angle_2 + \angle_2 + 3\angle_2 = 6\angle_2$

$\angle_2 = 30° \Rightarrow \angle_1 = 60° \quad \angle_3 = 90°$

BM – бис. $\angle_3 \Leftrightarrow$ бис. $\angle B$

$AC = x \quad AB = x - 10$

По теор. синусов.

$\frac{x}{\sin 90°} = \frac{x-10}{\sin 60°} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 2x - 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{2-\sqrt{3}}$

$AB = x - 10 = \frac{20 - 20 + 10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$\angle ABM = \frac{1}{2}\angle B = 45°$

$\angle AMB = 180 - 30 - 45 = 105°$

$\sin(105°) = \sin(45° + 60°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\triangle AMB$: по теор. синусов

$\frac{AB}{\sin\angle AMB} = \frac{MB}{\sin\angle A} \Leftrightarrow \frac{\frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{MB}{\frac{1}{2}}; \ MB = \frac{10\sqrt{6}}{5-\sqrt{3}}$

③

② $\angle_3 = 3\angle_1$

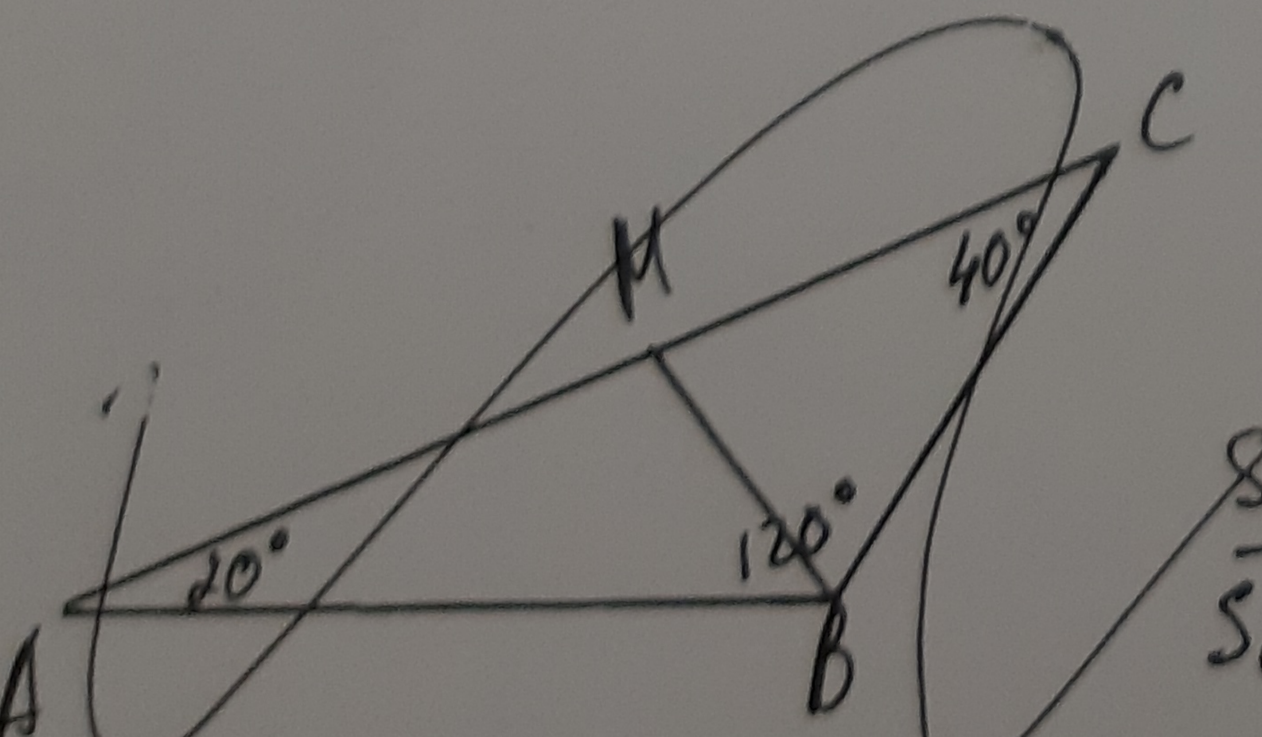
$\angle_3 = 3 \cdot 2\angle_2 = 6\angle_2$

$180° = 6\angle_2 + \angle_2 + 2\angle_2 = 9\angle_2$

$\angle_2 = 20° \quad \angle_1 = 40° \quad \angle_3 = 120°$

BM – бис. $\angle ABM = \angle CBM = 60°$

$AC = x$



$\triangle ABC$: $\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x-10}{\sin 40} = \frac{BC}{\sin 20°}; \ BC = \frac{(x-10)\sin 20}{\sin 40}$

$\frac{S_{AMB}}{S_{CMB}} = \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}; \ \frac{AM}{MC} = \frac{(x-10)\sin 40}{(x-10)\sin 20} = \frac{\sin 40°}{\sin 20°}$

$x = MC + MC \cdot \frac{\sin 40°}{\sin 20°}; \ MC = \frac{x}{1 + \frac{\sin 40}{\sin 20}}$

$AM = \frac{\frac{\sin 40}{\sin 20} x}{1 + \frac{\sin 40}{\sin 20}}$

$\triangle AMB$: теор. синусов

$\frac{BM}{\sin 20°} = \frac{AM}{}$

Задача 3 (продолжение)

② $\alpha_3 = 3\alpha_1$

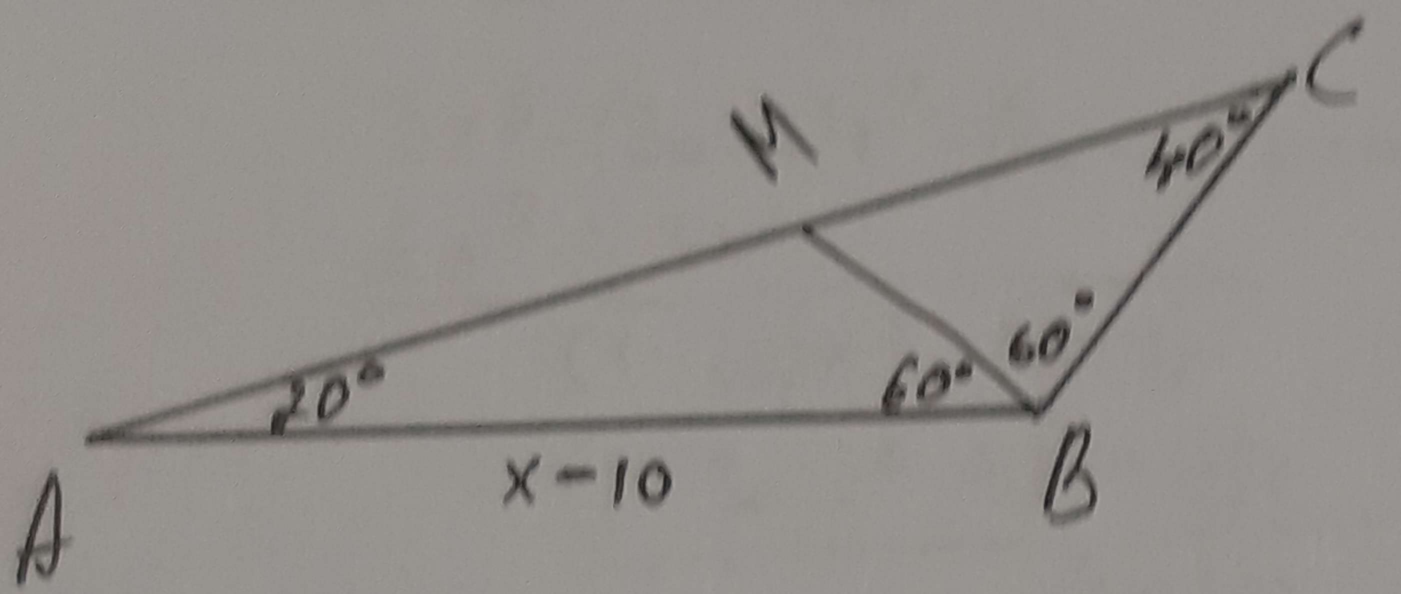
$\alpha_3 = 3 \cdot 2\alpha_2 = 6\alpha_2$

$180 = 6\alpha_2 + \alpha_2 + 2\alpha_2 = 9\alpha_2$

$\alpha_2 = 20° = \angle A$

$\angle C = \alpha_1 = 40°$

$\angle B = \alpha_3 = 120°$



$\angle ABM = \angle CBM = 60°$

$$\frac{x-10}{\sin 40°} = \frac{x}{\sin 120°}$$

$$\frac{x-10}{\sin 40°} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x - 5\sqrt{3} = \sin 40° x$$

$$x = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40°}$$

$$AB = x - 10 = \frac{5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 10\sin 40°}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40°} = \frac{20\sin 40°}{\sqrt{3} - 2\sin 40°}$$

$$\frac{BM}{\sin 20°} = \frac{AB}{\sin 100°}$$

$$BM = \frac{\sin 20°}{\sin 100°} \cdot \frac{20\sin 40°}{\sqrt{3} - 2\sin 40°} = \frac{\sin 20° \cdot 20\cancel{\sin 40°}}{2\cancel{\sin 40°} \cdot \cos 40°(\sqrt{3} - 2\sin 40°)} =$$

$$= \frac{\sin 20° \cdot 10}{(\cos^2 20° - \sin^2 20°)(\sqrt{3} - 4\sin 20° \cos 20°)}$$

Задача 4.

$$3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=0$$

$x=-1$

$-3-3a+4+2a-3+a+2=0 \Rightarrow x=-1$ всегда корень

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2 & x+1 \\ \underline{3x^3+3x^2} & \overline{3x^2+(1-3a)x+a+2} \\ (1-3a)x^2-(2a-3)x & \\ \underline{(1-3a)x^2+(1-3a)x} & \\ (a+2)x+a+2 & \\ \underline{(a+2)x+a+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(x+1)\left(3x^2+(1-3a)x+a+2\right)=0$$

должно иметь 2 корня, хотя бы один из них - целый

$$3x^2+(1-3a)x+a+2=0$$

$$D=1+9a^2-6a-12a-24=9a^2-18a-23>0$$

$$D=324+828=1152=(24\sqrt{2})^2$$

$$a\in\left(-\infty;\frac{18-24\sqrt{2}}{18}\right)\cup\left(\frac{18+24\sqrt{2}}{18};+\infty\right)\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\frac{3-4\sqrt{2}}{3}\right)\cup\left(\frac{3+4\sqrt{2}}{3};+\infty\right)$$

$$-\frac{1}{3}>\frac{3-4\sqrt{2}}{3}>-1 \qquad \frac{7}{3}<\frac{3+4\sqrt{2}}{3}<3$$

$$a\in[-5;-1]\cup[3;6]$$

чтобы корень был целым

$9a^2-18a-23$ должно быть квадратом целого числа

$a=-5$ $\quad 9\cdot25+18\cdot5-23=292$ не квадрат

$a=-4$ $\quad 9\cdot16+18\cdot4-23=193$ не квадрат

$a=-3$ $\quad 9\cdot9+18\cdot3-23=112$ не квадрат

\+ $a=-2$ $\quad 9\cdot4+18\cdot2-23=49$ квадрат, $x_1=\frac{7+7}{6}=0$ целый $x_2=\frac{-7-7}{6}=-\frac{7}{3}$

\+ $a=-1$ $\quad 9+18-23=4$ квадрат, $x_1=\frac{-4+2}{6}=1$ $x_2=\frac{-4-2}{6}=\frac{1}{3}$

\+ $a=3$ $\quad 9\cdot9-18\cdot3-23=4$ квадрат $x_1=\frac{-8-2}{6}=-\frac{5}{3}$ $x_2=\frac{-8+2}{6}=-1$ ← целый

\+ $a=4$ $\quad 9\cdot16-18\cdot4-23=49$ квадрат $x_1=\frac{-11-7}{6}=-3$ $x_2=-\frac{26}{3}$ $\quad x_1=-3$ целый

$a=5$ $\quad 9\cdot25-18\cdot5-23=112$ не квадрат

$a=6$ $\quad 9\cdot36-18\cdot6-23=193$ не квадрат

подходят $a=-2;-1;3;4$, то есть 4 числа

из 12

Вероятность $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0,333\ldots$

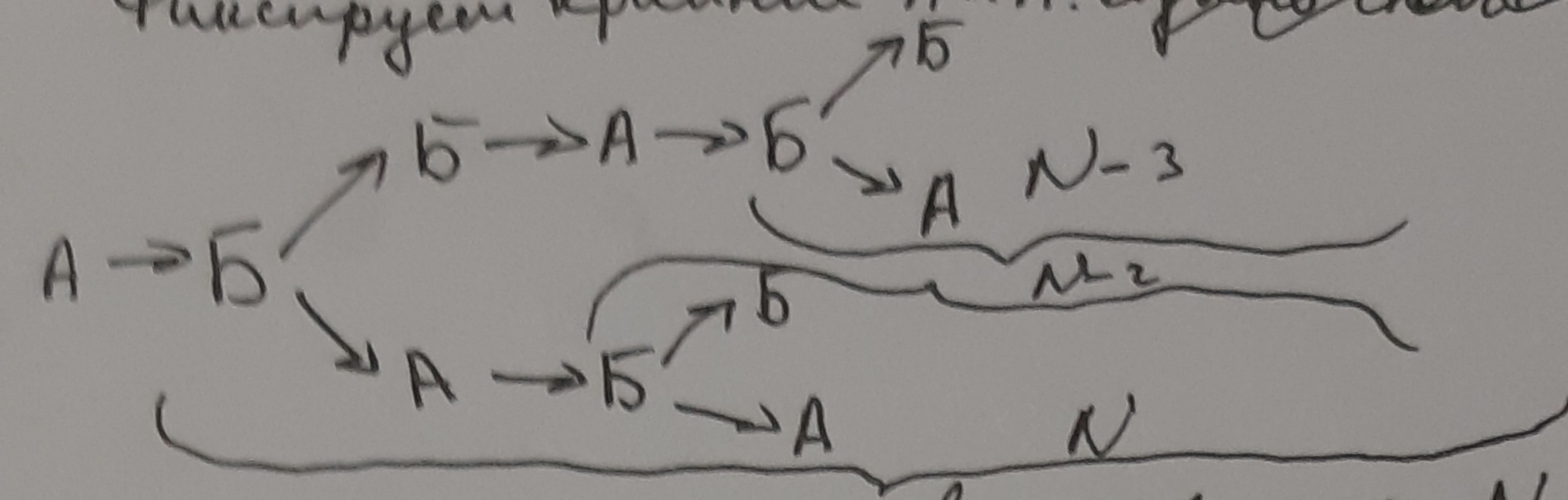
Ответ: $\frac{1}{3}=0,333\ldots$

5

Задача 5

Фиксируем крайние А и А. ~~Нужно чтобы~~

$\text{А}\underbrace{\text{Б}\ldots\ldots\text{Б}}_{18\ \text{букв.}}\text{А}$



Б +
А −
Б +
Б +
А −
⋮

Заметим, что количество слов для N букв, оканчивающихся на Б, складывается из кол-ва таких слов из N−2 и N−3 букв.

$F(N) = F(N-2) + F(N-3)$

F(1) = 1 Б
F(2) = 1 ББ
F(3) = 1 БАБ
F(4) = 1+1 = 2
F(5) = 2
F(6) = 3
F(7) = 4
F(8) = 5
F(9) = 7
F(10) = 9
F(11) = 12
F(12) = 16
F(13) = 21
F(14) = 28
F(15) = 37
F(16) = 49
F(17) = 65
F(18) = 86

то есть, есть 86 слов из 18 букв, начинающихся и ~~заканчивающихся~~ на Б, что равно искомому кол-ву слов (просто к каждому на концы добавить А)

Ответ: 86