МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Пылёв Андрей Андреевич**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^{\circ})\,?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты AB2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1 Вариант 3 учитвник

Обозначим b_i - i член прогрессии, где $i\in[1;6]$

q - знаменатель этой геометрической прогрессии

По условию

$$\frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}=30 \quad (1)$$

$$\frac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4}=120 \quad (2)$$

т.к b_i - члены геом прогрессии

$b_3=b_1q^2$

$b_4=b_2q^2$

$b_5=b_3q^2$

$b_6=b_4q^2$

значит ур. (2) примет вид

$$\frac{(b_1+b_2+b_3+b_4)q^2}{4}=120$$

с учёт ур. 1

$30q^2=120$

$q^2=4 \Rightarrow q=\pm2$

$b_4=b_1q^3$

$b_2=b_1q$

$b_3=b_1q^2$

с уч. этого уравнение (1) примет вид

$$\frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4}=30 \qquad b_1=\frac{120}{1+q+q^2+q^3} \quad (3)$$

с уч. (3)

$$b_4=b_1q^3=\frac{120q^3}{1+q+q^2+q^3}$$

при $q=2$

$$b_4=\frac{120\cdot8}{1+2+4+8}=64$$

при $q=-2$

$$b_4=\frac{120\cdot(-2)^3}{1-2+4-8}=192$$

Ответ: 64 или 192

№2 Вариант 3 Чистовик

$\sin(\pi x)=\sin(2x^\circ)$ (1) Из соотношения в радианной и градусной меры угла справедливо соотношение

$$\sin(2x^\circ)=\sin\left(\frac{2\pi}{180}x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{90}x\right)$$

следовательно уравнение (1) приобретает вид $\sin(\pi x)=\sin\left(\frac{\pi}{90}x\right)$

$$\left[\begin{array}{l}\pi x=\frac{\pi}{90}x+2\pi n\\ \pi x=\pi-\frac{\pi}{90}x+2\pi k\end{array}\right.\quad n,k\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l}x\cdot 90=x+180n\\ x\cdot 90=90-x+180k\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{180}{89}\cdot n\\ x=\frac{90}{91}+\frac{180}{91}k\end{array}\right.$$

Модуль разности между этими корнями равен — $\left|\frac{180}{89}n-\left(\frac{90}{91}+\frac{180}{91}k\right)\right|=\frac{90}{91\cdot 89}\left|2n\cdot 91-(2k+1)\cdot 89\right|=$

$=\frac{90}{8099}\left|2n\cdot 91-(2k+1)\cdot 89\right|$

Поскольку $2n\cdot 91$ — чётное, а $(2k+1)\cdot 89$ — нечётное, то модуль их разности ≥ 1 например при $n=67$, $k=68$ она равна 1

значит расстояние между ближайшими корнями

$\frac{90}{8099}\cdot 1=\frac{90}{8099}$

Ответ: $\frac{90}{8099}$

~3:

Вариант 3   Чистовик

Пусть наименьший угол — α, значит другой 2α, третий угол 3α либо 6α

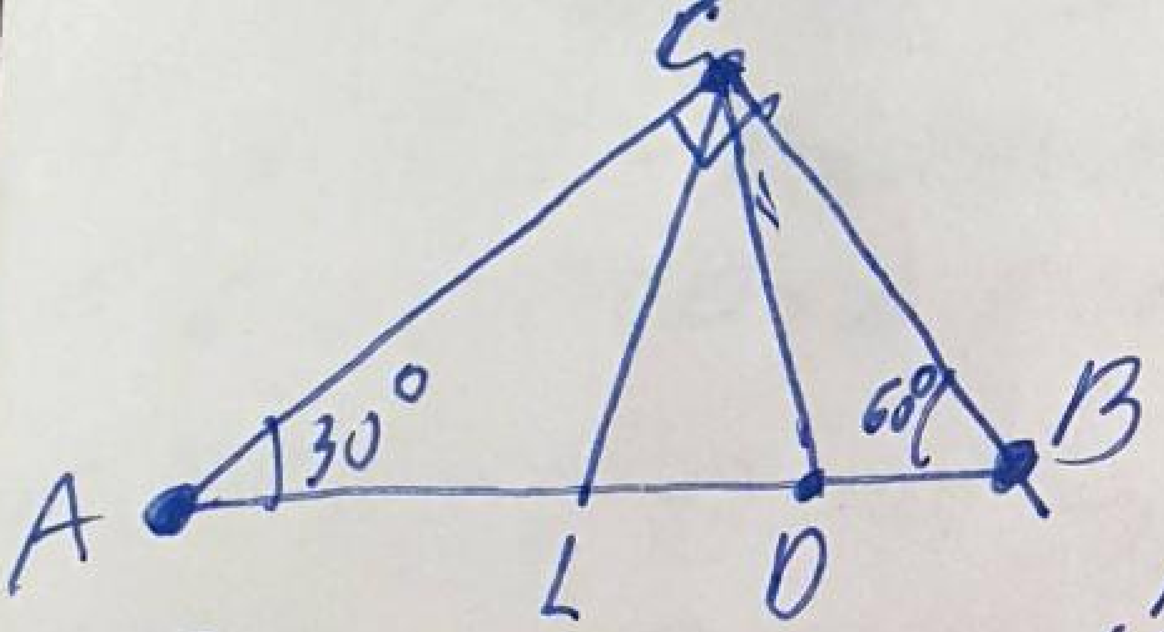
По теореме о сумме углов треугольника

$\alpha+2\alpha+3\alpha=180$ или $\alpha+2\alpha+6\alpha=180$

$\alpha=30^\circ$ $\alpha=20^\circ$

Первый случай

Пусть $\angle A=30^\circ$ $\angle B=60^\circ$ $\angle C=90^\circ$, $AB=AC+20$



Отметим такую точку D, что

$AD=AC$ и $BD=20$

Т.к $AC=AD$ (по построению), то ΔACD — равнобедренный, откуда с учётом теоремы о сумме углов треугольника $\angle ACD=\frac{180-\angle A}{2}$, т.к $\angle ACD=\angle ADC$ (ΔACD-равнобедр.) $\angle ACD=75^\circ$

Т.к $\angle C=\angle ACD+\angle DCB \Rightarrow \angle DCB=15^\circ$

Т.к CL — биссектриса $\angle C$, то $\angle BCL=\frac{\angle C}{2}$

$\angle BCL=\angle BCD+\angle DCL \Rightarrow \angle DCL=30^\circ$

По теореме о сумме углов треугольника в ΔDCL

$\angle CLD=180^\circ-\angle CDL-\angle LCD=75^\circ$

Т.к $\angle CLD=\angle CDL=75^\circ$, то ΔCLD — равнобедренный

— $LC=CD$

По теореме синусов в ΔBDC

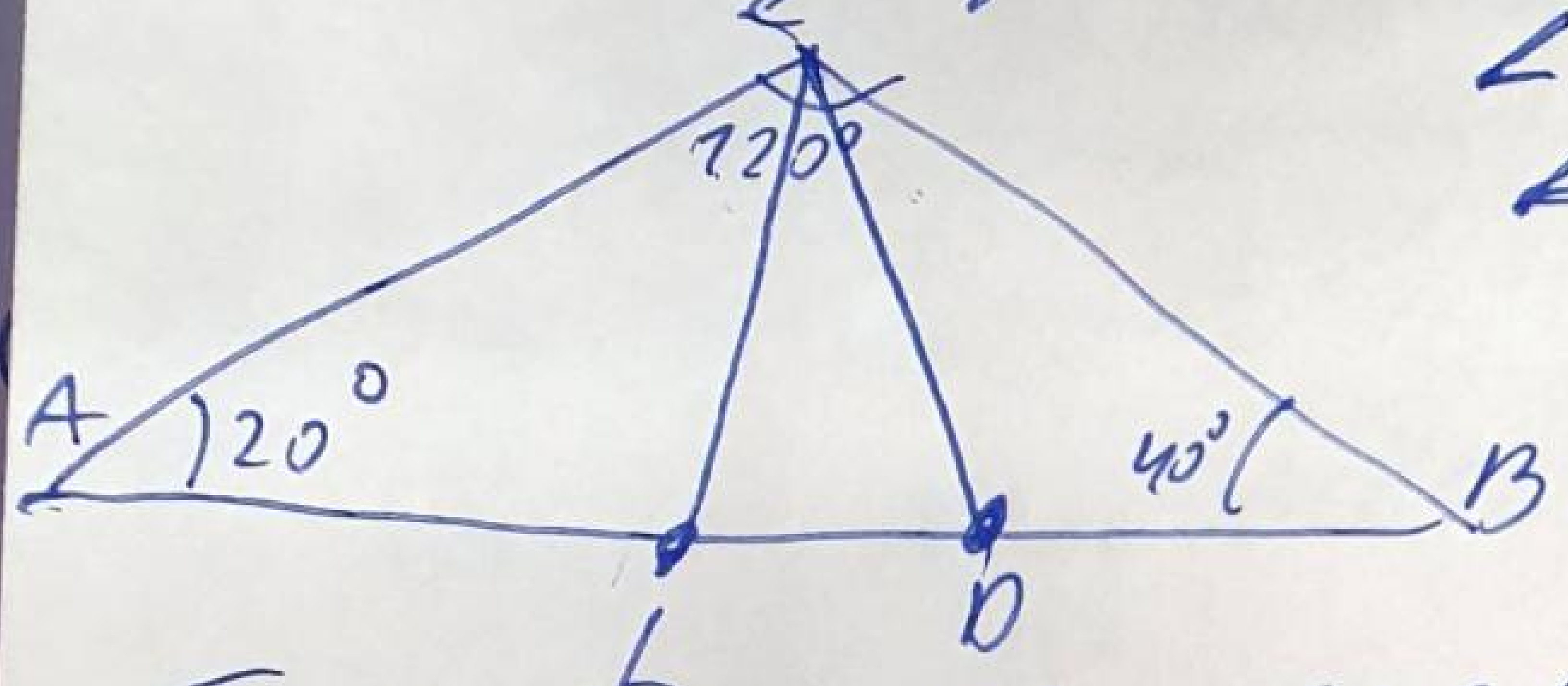
$$\frac{BD}{\sin\angle DCB}=\frac{CD}{\sin\angle B}\qquad LC=CD=\frac{BD\sin\angle B}{\sin\angle DCB}=\frac{20\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sin 15}=\frac{10\sqrt{3}}{\sin 15}$$

$$\sin 15^\circ=\sin(60-45)=\sin 60\cdot\cos 45-\sin 45\cdot\cos 60=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$LC=\frac{40\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}=\frac{2\cdot 20\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{((\sqrt{3})^2-1)\sqrt{2}}=\frac{60+20\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{20(3+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

Scanned by TapScanner

Второй случай   Вариант 3 Чипизик



$\angle A = 20^0$ $\angle B = 40$ $\angle C = 120^0$

$AB = AC + 20$

Отметим такую точку D, что $AD = AC$; $BD = 20$

Т.к $AC = AD$, то $\triangle ACD$ – равнобедренный $\Rightarrow$ $\angle ACD = \angle CDA$, по теореме о сумме углов треугольника $\angle ACD = \angle CDA = \dfrac{180^0 - \angle A}{2} = 80^0$

Т.к CL – биссектриса $\angle C$; то $\angle ACL = \angle LCB = \dfrac{\angle C}{2} = 60^0$

$\angle C = \angle ACD + \angle BCD \Rightarrow \angle BCD = \angle C - \angle ACD = 40^0$, поэтому $\angle BCD = \angle B = 40^0 \Rightarrow \triangle BDC$ – равнобедренный, поэтому $BD = CD = 20$

Т.к $\angle BCL = \dfrac{\angle C}{2} = \angle BCD + \angle LCD$ $\Rightarrow \angle LCD = \dfrac{\angle C}{2} - \angle BCD = 20^0$ откуда по теореме о сумме углов треугольника $\angle CLD = 180 - \angle LCD - \angle LDC = 80^0$ Т.к $\angle CLD = \angle LDC = 80^0$, то $\triangle LDC$ – равнобедренный, откуда $CL = CD$, а $CD = BD$, значит $CL = BD = 20^0$

Ответ: $10\sqrt{2}(3+\sqrt{3})$ или 20

~4 вариант 3 Чистовик

$3x^3+(3a+4)x^2+(2a+3)x-a+2=0$ (1)

Подставим $x=-1$
$-3+3a+4-2a-3-a+2=0$
значит $(x+1)$ - можно вынести из уравн. (1)

$(x+1)(3x^2+(3a+1)x+2-a)=0$

Как видно, при всех a - есть целый корень $x=-1$

значит уравнение $3x^2+(3a+1)x+2-a=0$ имеет 2 корня

$3x^2+3ax+x-a+2=0$

$a(3x-1)+3x^2+x+2=0$

$a(3x-1)=-3x^2-x-2$

$a(3x-1)=-x(3x-1)-\frac{2}{3}(3x-1)-\frac{8}{3}$

$3a=-3x-2-\frac{8}{(3x-1)}$ (9), чтобы a - было целым $\frac{8}{3x-1}$ - должно быть целым

значит

$3x-1$ равно ±1, ±2, ±4, ±8

$3x-1=\pm1$ $\quad 3x=1\pm1$
$3x-1=\pm2$ $\quad 3x=1\pm2$
$3x-1=\pm4$ $\quad 3x=1\pm4$
$3x-1=\pm8$ $\quad 3x=1\pm8$

(1) $x=0$
(2) $x=\frac{2}{3}$
(3) $x=-\frac{1}{3}$
(4) $x=1$
(5) $x=\frac{5}{3}$
(6) $x=-1$
(7) $x=3$
(8) $x=-\frac{7}{3}$

посчитаем $3a_i$ из (9) x_i - корни соотв. ур. (1)-(8), $i\in[1,8]$

$3a_1=6$ $\quad a_1=2$
$3a_2=-12$ $\quad a_2=-4$
$3a_3=3$ $\quad a_3=1$
$3a_4=-9$ $\quad a_4=-3$
$3a_5=-9$ $\quad a_5=-3$
$3a_6=3$ $\quad a_6=1$
$3a_7=-12$ $\quad a_7=-4$
$3a_8=6$ $\quad a_8=2$

Как видно при всех a, кроме $a=2; 1; -3; -4$ нет целых решений x, кроме $x=-1$

Но при $a=1$ есть всего 2 корня $x=-1$ и $x=\frac{1}{3}$
значит $a=-1$ не подходит

при $a=2$ корни $x=-1$, $x=0$, $x=-\frac{7}{3}$
при $a=-3$ корни $x=-1$, $x=1$, $x=\frac{5}{3}$
при $a=-4$ корни $x=-1$, $x=3$, $x=\frac{7}{3}$

значит подходящих a из 12 $(-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)$
всего 3

Поэтому вероятность $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$

№5 Вариант 3 чистовик

Обозначим $N(i)$ - количество i-буквенных слов $i \in \mathbb{N}$. При $i<3$ нет допустимых правилами слов (все возм. комбинации при $i<3$ A, B, AB, BO, BA, AA не удв. прав.)

$N(3)=1$ (слово ABO) $N(4)=1$ слово (ABBA), $N(5)=1$ (слово ABABA) $N(6)=2$ (слова ABBABA и ABABBA) остальные слова невозможны при $i \leq 6$

i-буквенное слово нельзя получить добавлением A или B слева к $(i-1)$-буквенному слову. Можно получить из $(i-2)$-буквенного слова добавлением AB слева, можно получить из $(i-3)$-буквенного слова добавлением ABB слева. i-буквенное слово можно получить из $(i-4)$-буквенного слова, $(i-5)$, $(i-6)$ и т.д, но это будут комбинации получения, например из $(i-5)$-буквенного добавлением сначала AB, а потом ABB или наоборот, с остальными аналогично, что не приведёт к получению новых i-буквенных слов т.к будет работать тот же алгоритм, что и при получении i-буквенного слова из $(i-3)$ и $(i-2)$-буквенных слов, но дважды или более. Поэтому новое i-буквенное слово может быть образовано от $(i-2)$-буквенного и $(i-3)$-буквенного слова единственным образом, от каждого такого слова. Значит $N(i)=N(i-3)+N(i-2)$, проверим для известного $N(6)=2$ по формуле $N(6)=N(3)+N(4)=1+1=2$, что верно.

$N(7)=N(4)+N(5)=2$ $N(8)=N(5)+N(6)=3$ $N(9)=N(6)+N(7)=4$

$N(10)=N(7)+N(8)=5$ $N(11)=N(8)+N(9)=7$ $N(12)=N(9)+N(10)=9$

$N(13)=N(10)+N(11)=12$ $N(14)=N(11)+N(12)=16$ $N(15)=N(12)+N(13)=21$

$N(16)=N(13)+N(14)=28$ $N(17)=N(14)+N(15)=37$ $N(18)=N(15)+N(16)$ $=49$ $N(19)=N(16)+N(17)=65$ $N(20)=N(17)+N(18)=86$ $N(21)=N(18)+N(19)=114$

№5 продолжение   вариант 3 Чистовик

Ответ: 114