МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Пермяков Марк Владиславович**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^{\circ})?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1

$\exists$ даны члены $b, bq, bq^2, bq^3, bq^4, bq^5$

По условию:

$$\begin{cases} \dfrac{b+bq+bq^2+bq^3}{4} = 15 \\ \dfrac{bq^2+bq^3+bq^4+bq^5}{4} = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b+bq+bq^2+bq^3}{4} = 15 \\ q^2\left(\dfrac{b+bq+bq^2+bq^3}{4}\right) = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q^2 \cdot 15 = 60$$

$$q = \pm 2$$

1) Если $q = 2$, то:

$$\frac{b+2b+4b+8b}{4} = 15$$

$$15b = 60$$

$$b = 4 \quad \Rightarrow \quad bq^5 = 4 \cdot 32 = 128$$

2) Если $q = -2$, то:

$$\frac{b-2b+4b-8b}{4} = 15$$

$$-5b = 60 \Rightarrow b = -12 \Rightarrow bq^5 = -12 \cdot (-32) = 384$$

Ответ: 128 или 384

№2

$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$

Если $180^\circ = \pi$ рад, то $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ рад.

$$\sin(\pi x) = \sin\left(3\cdot\frac{\pi x}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$$

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k \\ \pi x = \pi - \frac{\pi x}{60} + 2\pi k \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{59}{60}\pi x = 2\pi k \\ \frac{61}{60}\pi x = \pi + 2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{120}{59}k \\ x = \frac{60}{61}(2k+1) \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Нужно найти наименьшую разность $|x_1 - x_2|$.

Если и x_1, и x_2 вида $\frac{120}{59}k$, то наименьшее значение $|x_1 - x_2| = \frac{120}{59}$ (берём соседние корни)

Если они вида $\frac{60}{61}(2k+1)$, то наименьшее значение $|x_1 - x_2| = \frac{120}{61}$ (снова соседние корни)

Пусть, не нарушая общности $x_1 = \frac{120}{59}n$, $x_2 = \frac{60}{61}(2m+1)$, n и $m \in \mathbb{Z}$.

Найдём $\min(|x_1 - x_2|)$:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{120}{59} n - \frac{60}{61}(2m+1) \right| = \left| 60 \left(\frac{2n}{59} - \frac{2m+1}{61} \right) \right| =$$

$$= 60 \cdot \left| \frac{122n - 118m - 59}{61 \cdot 59} \right|$$

Т.к. n и $m \in \mathbb{Z}$, то $|122n - 118m - 59| \in \mathbb{Z}$.

Найдём его min

Если $122n - 118m - 59 = 0$, то $\underbrace{122n}_{\vdots 2} = \underbrace{118m + 59}_{\not\vdots 2}$

такого не может быть

Если $122n - 118m - 59 = 1$, то

$$122n = 118m + 60$$

$$61n = 59m + 30$$

Такое м.б. при $n = m = 15$

Таким образом, $\min(|122n - 118m - 59|) = 1$

Значит, $\min(|x_1 - x_2|) = \frac{60}{61 \cdot 59} \cdot 1$

Очевидно, это меньше $\frac{120}{59}$ и $\frac{120}{61}$, значит это ответ.

Ответ: $\frac{60}{61 \cdot 59}$

№3

$\exists$ α, β и γ - углы треугольника.

$\exists$ $\beta = 2\alpha$ - по условию, не нарушая общности

Если, по условию, $\gamma = 3\alpha$, то $\gamma > \beta = 2\alpha > \alpha$

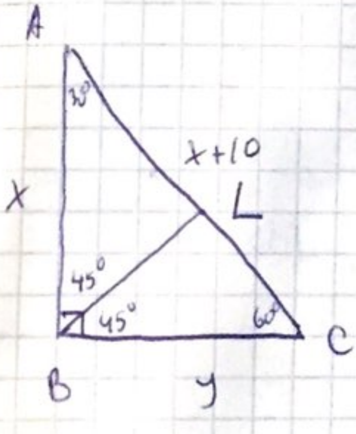
если $\gamma = 3\beta$, то $\gamma > \beta > \alpha$

В любом случае, $\gamma > \beta > \alpha$. Тогда, γ лежит напротив большей стороны $x+10$, β напротив x, α напротив $y < x$

Случай 1. Если $\gamma = 3\alpha$

$$\gamma + \beta + \alpha = 3\alpha + 2\alpha + \alpha = 6\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ, \ \gamma = 90^\circ$$



С одной стороны, $y = \frac{x+10}{2}$, т.к. $\alpha = 30^\circ$

С другой стороны, по Th Пифагора:

$$x^2 + \frac{(x+10)^2}{4} = (x+10)^2$$

$$x^2 = \frac{3}{4}(x+10)^2$$

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x+10)\right)^2 = \left(x - \frac{\sqrt{3}x}{2} - 5\sqrt{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}x}{2} + 5\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\sqrt{3} \quad \varnothing, \text{ т.к. } x>0 \\ x\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}+30 \end{array}\right.$$

Убедимся, что $y < x$ (т.к. $\frac{x+10}{2} < x$, т.к. $10 < x$)

$\triangle ABL$, $\angle ALB = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$

По Th sin :

$$\frac{BL}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 105^\circ}$$

$$\sin(105^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

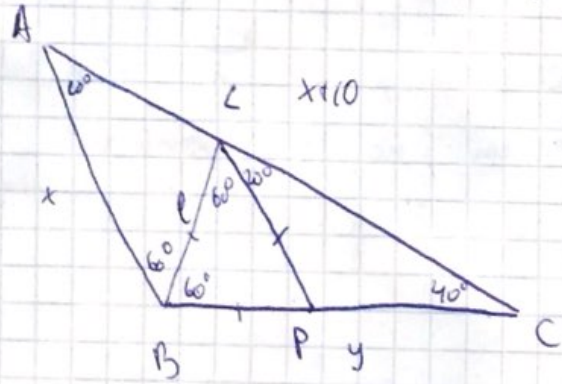
$$BL = \frac{x}{\sin 105^\circ} \cdot \sin 30^\circ = \frac{20\sqrt{3}+30}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(20\sqrt{3}+30)\, 2\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)} =$$

$$= \frac{20\sqrt{3}+30}{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{2}$$

Случай 2. Если $\gamma = 3\beta = 6\alpha$

$\gamma + \beta + \alpha = 6\alpha + 2\alpha + \alpha = 9\alpha = 180^\circ$

$\alpha = 20^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$, $\gamma = 120^\circ$



$\exists\, BL = l$

Проведём $LP \parallel AB$

~~ВСР~~ $\angle CLP = \angle CAB = 20^\circ$

$\angle BLP = \angle BLC - 20^\circ = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$

$\triangle BLP$ - равносторонний $\Rightarrow LP = BL = l$

$\Delta LPC \sim \Delta ABC$ по двум углам

$$\Downarrow$$

$$\frac{LP}{AB} = \frac{CP}{BC} \Rightarrow \frac{l}{x} = \frac{y-l}{y}$$

$CP = BC - BP = y - l$

$$ly = xy - xl$$

$$l = \frac{xy}{x+y}$$

По Th sin в ΔABC:

$$\frac{x+10}{\sin 120^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{x+10}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 40^\circ}$$

$$1 + \frac{10}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 40^\circ}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ}{2\sin 40^\circ}$$

$$x = \frac{20\sin 40^\circ}{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ}$$

Также: $\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{y}{\sin 20^\circ} \Rightarrow y = x\,\frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}$

$$l = \frac{xy}{x+y} = \frac{x^2 \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}}{x\left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}\right)} = x \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{20\sin 40^\circ \sin 20^\circ}{(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ)(\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ)}$$

Ответ: $\frac{20\sqrt{3} + 30}{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{2}$ или $\frac{20\sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ)(\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ)}$

№4

$a \in [-5; 6]$, $a \in \mathbb{Z}$

$f(x): 3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$

$\exists\ x_1, x_2, x_3$ — корни.

Заметим, что $x = -1$ корень при $\forall a$:

$-3 - (3a-4)\cdot 1 - (2a-3)(-1) + a + 2 = -3 - 3a + 4 + 2a - 3 + a + 2 =$
$= 0$.

Значит, $x_3 = -1$.

По Th Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = \dfrac{3a-4}{3} \\ x_1 x_2 - x_1 - x_2 = \dfrac{-(2a-3)}{3} \\ -x_1 x_2 = \dfrac{-a-2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{3a-1}{3} \\ x_1 x_2 = \dfrac{a+2}{3} \end{cases}$$

Составим уравнение с корнями x_1 и x_2.

$g(x): 3x^2 - (3a-1)x + a + 2 = 0$

Найдём все a, при которых $g(x)$ имеет два корня, хотя бы один из них целый и оба не равны -1. Это эквивалентно тому, что $f(x)$ имеет 3 различных корня, хотя бы 2 целых.

1) Условие того, что у $g(x)$ два корня это $D > 0$

$D = 9a^2 + 1 - 6a - 12a - 24 = 9a^2 - 18a - 23 > 0$

$(3a-3)^2 - 32 > 0$

$$\begin{cases} (3a-3)^2 > 32 \\ a \in [-5; 6], \ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in [-5; -1] \cup [3; 6] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) Условие того, что $x_2 = -1$ не является корнем:

$g(-1) \neq 0$

$3 + 3a - 1 + a + 2 \neq 0$

$4a \neq -4$

$a \neq -1$

Значит, $\begin{cases} a \in [-5; -2] \cup [3; 6] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $x = \dfrac{3a-1 \pm \sqrt{(3a-3)^2 - 32}}{6}$

Нужно, чтобы хотя бы 1 был целым.
Переберём все возможные a:

$a = -5$:

$\sqrt{D} = \sqrt{(-15-3)^2 - 32} = \sqrt{324 - 32} = \sqrt{292} \notin \mathbb{Q}$, значит ни один x точно $\notin \mathbb{Z}$

$a = -4$

$\sqrt{D} = \sqrt{(-12-3)^2 - 32} = \sqrt{225 - 32} = \sqrt{193} \notin \mathbb{Q}$

$\varnothing$

$a = -3$

$\sqrt{D} = \sqrt{144 - 32} = \sqrt{112}$ $\varnothing$

$a = -2$

$\sqrt{D} = \sqrt{81 - 32} = \sqrt{49} = 7$

$x = \dfrac{3(-2) - 1 \pm 7}{6} = \dfrac{-7 \pm 7}{6}$

$x_1 = 0 \in \mathbb{Z}$

$x_2 = -\dfrac{7}{3}$, значит, $a = -2$ подходит

$a=3$

$\sqrt{D} = \sqrt{36-32} = 2$

$x = \dfrac{3\cdot 3 - 1 \pm 2}{6} = \dfrac{8 \pm 2}{6}$

$x_1 = 1 \in \mathbb{Z}$ $\quad a=3$ подходит

$x_2 = \dfrac{5}{3}$

$a=4$

$\sqrt{D} = \sqrt{81-32} = 7$

$x = \dfrac{12-1 \pm 7}{6}$

$x_1 = \dfrac{2}{3}$ $\quad a=4$ подходит

$x_2 = 3 \in \mathbb{Z}$

$a=5$

$\sqrt{D} = \sqrt{144-32} = \sqrt{112}$ $\varnothing$

$a=6$

$\sqrt{D} = \sqrt{225-32} = \sqrt{193}$ $\varnothing$

Итого, нам подошли $a=3$

$a=4$

$a=-2$

Всего целых чисел от -5 до 6 равно 12, а нам подошли 3 числа, значит, вероятность:

$\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

Ответ: 0,25