



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гурман Тимофей Владимирович**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a + 4)x^2 + (2a + 3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АВВА, АВАВАВА, АВВАВАВВА являются допустимыми, а слова АВВАВ, АВААВА, АВАВВВА – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

N1

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ & b_1 q & b_1 q^2 & b_1 q^3 & b_1 q^4 & b_1 q^5 \end{matrix}$$

$$\frac{b_1(q + q^2 + q^3 + 1)}{4} = 30$$

$$\frac{b_1(q^2 + q^3 + q^4 + q^5)}{4} = 120$$

$$b_1(q + q^2 + q^3 + 1) = 120$$

$$b_1 q^2(q + q^2 + q^3 + 1) = 480$$

$$\cancel{b_1 q^2(q + q^2 + q^3 + 1)} = 4 \cancel{b_1(q + q^2 + q^3 + 1)}$$

$$q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$$

1. $q = 2$

$$b_1(2 + 4 + 8 + 1) = 120$$

$$15b_1 = 120$$

$$b_4 = b_1 q^3 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$b_1 = 8$$

Последовательность 8; 16; 32; 64; 128; 256

$$\frac{8 + 16 + 32 + 64}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

$$\frac{32 + 64 + 128 + 256}{4} = 120$$

похожим

2. $q = -2$

$$b_1(-2 + 4 - 8 + 1) = 120$$

$$-5b_1 = 120$$

$$b_1 = -24$$

тогда -24; 48; -96; 192; -384; 768

$$\frac{-24 + 48 - 96 + 192}{4} = 30 \quad \checkmark$$

$$\frac{-96 + 192 - 384 + 768}{4} = 120 \quad \checkmark$$

Ответ:
64; 192

похожим
 $b_4 = 24 \cdot 8 = 192$

номер 2

A. Задача 2 (1)

$$\sin 8x = \sin 2x^{\circ}$$

$$\sin 8x = \sin\left(\frac{2\pi}{180} x\right)$$

$$\sin(8x) - \sin\left(\frac{8}{90} x\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{8x - \frac{8x}{90}}{2}\right) \cos\left(\frac{8x + \frac{8x}{90}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{8x - \frac{8x}{90}}{2} = 0 & (1) \\ \cos \frac{8x + \frac{8x}{90}}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \frac{8x - \frac{8x}{90}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot \frac{89}{90} = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{180k}{89}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \frac{8x + \frac{8x}{90}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot \frac{91}{90} = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{90 + 180n}{91}, n \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим 3 случая:

$$1) \min_1(x_{11} - x_{12}) = \frac{180}{89}(k_1 - k_2) = \frac{180}{89} (k_1 \neq k_2) > 1$$

$$2) \min_2(x_{21} - x_{22}) = \frac{180}{91}(n_1 - n_2) = \frac{180}{91} (n_1 \neq n_2) > 1$$

$$3) \min_3(x_1 - x_2) = \min\left(\frac{180 \cdot 91k - 90 \cdot 89 - 180 \cdot 89n}{91 \cdot 89}\right) = \frac{90}{91 \cdot 89} \min(182k - 89 - 178n) = \frac{90}{91 \cdot 89} \min(182k - 178n - 89)$$

Рассе $\min_3(182k - 178n - 89) \in \mathbb{N}$

$$\min_3 = 1 \quad 182k - 178n = 90$$

$$91k - 89n = 45 \quad 91 \cdot 67 - 89 \cdot 68 = 45$$

Задача 2(2)

$K=67, n=68$ уғави. $\Rightarrow \min q = 1$

$$\min_3 = \frac{90}{91 \cdot 89} \quad \min q = \frac{90}{91 \cdot 89} < 1$$

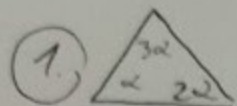
$$\min(\min_1, \min_2, \min_3) = \frac{90}{91 \cdot 89}$$

$$\text{Омбери: } \min = \frac{90}{91 \cdot 89}$$

Задача N3 (1)

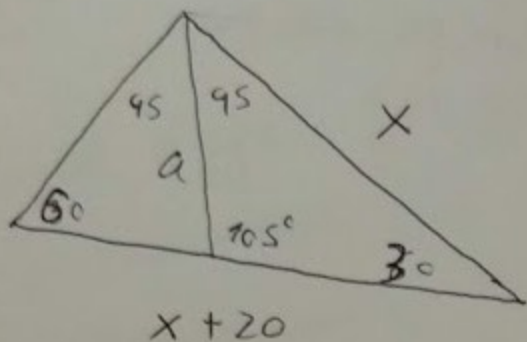
Рассм 2 случая

a - диаметр



$$6\alpha = 180$$

$$\alpha = 30$$



$$(20+x)\sin 60 = x$$

$$x(1-\sin 60) = 20\sin 60$$

$$x = \frac{20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sin 60} = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

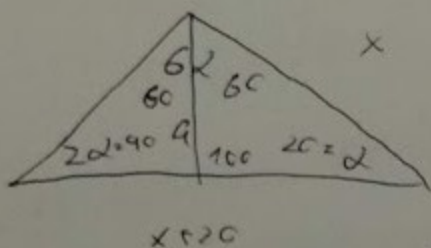
по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin 30} = \frac{x}{\sin 105} = \frac{x}{\sin 75} \Rightarrow a = \frac{x \cdot \sin 30}{\sin 75}$$

$$\begin{aligned} \sin 75 &= \sin(30+45) = \sin 30 \cdot \cos 45 + \cos 30 \cdot \sin 45 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$a = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{6+\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(6+\sqrt{2})}$$

$$(2) \quad 6\alpha, 2\alpha, \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$



$$\frac{x+20}{\sin 120} = \frac{x}{\sin 40} \Rightarrow x \sin 40 + 20 \sin 40 = x \sin 120$$

$$x(\sin 120 - \sin 40) = 20 \sin 40$$

$$x = \frac{20 \sin 40}{\sin 120 - \sin 40}$$

$$\frac{x}{\sin 100} = \frac{a}{\sin 20}$$

3 again 3(2)

$$a = \frac{x \cdot \sin 20}{\sin 100} = \frac{2 \sin 40 \cdot \sin 20}{\sin 100 (\sin 120 - \sin 40)}$$

$$= \frac{20 \sin 40 \cdot \sin 20}{\sin 100 \cdot 2 \sin 40 \cos 80} = \frac{10 \sin 20}{\sin 80 \cdot \cos 80}$$

$$= \frac{20 \sin 20}{\sin 160} = 20$$

$$\text{Answer: } 20; \frac{40\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(6+\sqrt{2})}$$

Задача 4 (1)

$$f(x) = 3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$$

Рассм. $f(-1) = -3 + 3a + 4 + 2a + 3 - a + 2 = 0$

$x = -1$ - корень

$$(x+1)(3x^2 + (3a+1)x + 2-a) = 0$$

Рассм. $(3x^2 + (3a+1)x + 2-a) = 0$

$$\Delta = (3a+1)^2 - 12(2-a) = 9a^2 + 6a + 1 + 12a - 24 = 9a^2 + 18a - 23$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 \\ \underline{3x^3 + 3x^2} \\ (3a+1)x^2 + (2a+3)x - a + 2 \\ \underline{-(3a+1)x + (3a+1)x} \\ 3x^2 + (3a+1)x + 2 - a \end{array}$$

Рассм a из $[-6; 5]$, $a \in \mathbb{Z}$

1. $a = -6$

$$\Delta = 324 - 108 - 23 = 193, \text{ нет целых корней}$$

2. $a = -5$

$$\Delta = 225 - 113 = 112, \text{ нет цел. корней}$$

3. $a = -4$

$$\Delta = 16 \cdot 9 - 95 = 49$$

$$x = \frac{11 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = 3$$

кор. х. х. х.

4. $a = -3$

$$\Delta = 81 - 54 - 23 = 4$$

$$x = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = 1$$

кор. х. х. х.

5. $a = -2$

7. $a = 0$

$$\Delta = 36 - 36 - 23 < 0$$

$$\Delta < 0$$

6. $a = -1$

$$\Delta < 0$$

8. $a = 1$

$$x = \frac{-9 \pm 2}{6}$$

не кор. х.

$$\Delta = 4$$

(только 1 кор. х.)

$$x = -1 \quad x = -\frac{1}{3}$$

Задача 4(2)

$$9. \boxed{a=2}$$

$$D=99$$

$$x = \frac{-7 \pm 7}{6} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{14}{6} \text{ не } \text{реш}$$

$$10. a=3$$

$$D=81+54-23=112 \text{ не } \text{реш}$$

$$11. a=4$$

$$D=9 \cdot 16 + 36 - 23 = 144 + 36 = 180 \text{ не } \text{реш}$$

$$12. a=5$$

$$D=9 \cdot 25 + 90 - 23 = 158 \text{ не } \text{реш}$$

Итого из 12 значений a решений ~~4~~ 3

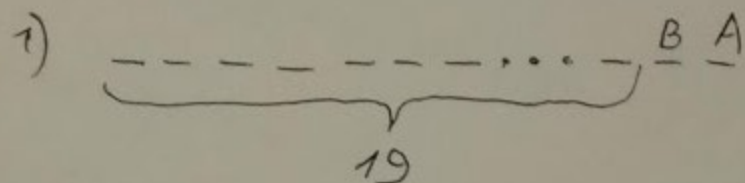
$$p = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$$

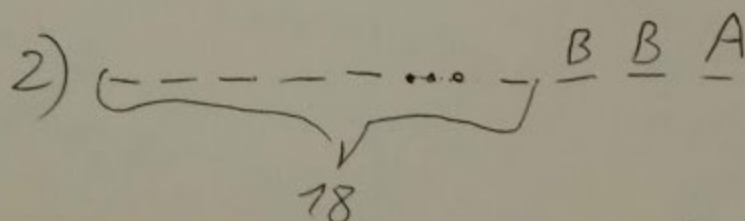
Ответ: 25%

Задача N5

Так как слово оканчивается на букву А,
оно может оканчиваться на ВА либо на
ВВА.

Тогда для 21-го слова:

1) 

2) 

Тогда 21-го слова будет (18-го слова +
+ 19-го слова), аналогично для 19-го слова
будет (16-го слова + 17-го слова). Следовательно, что
если A_n - количество слов из n букв, то

$$A_n = A_{n-2} + A_{n-3}, n \geq 4$$

Рассчитаем все значения n до 21:

$A_1 = 1$	$A_8 = 3$	$A_{15} = 21$
$A_2 = 0$ (ВА не может)	$A_9 = 4$	$A_{16} = 28$
$A_3 = 1$ (АВА)	$A_{10} = 5$	$A_{17} = 37$
$A_4 = 1$ (АВВА)	$A_{11} = 7$	$A_{18} = 49$
$A_5 = 1$	$A_{12} = 9$	$A_{19} = 65$
$A_6 = 2$	$A_{13} = 12$	$A_{20} = 86$
$A_7 = 2$	$A_{14} = 16$	$A_{21} = 114$

Ответ: 114

Президенту апелляционной
комиссии Олимпиады школьников
„Оскары Врублевых горы!“

Дектору ИГУ имени И.В. Ломоносова
академику В.А. Садовниченко
ученика 11А класса МАОУ ИИП

Пимона Владимира Викторовича

Апелляция

Я принял участие в заключительном
этапе по математике, но моей фамилии нет
в списке технических бабов.

30.05.2020

Б -