МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лунга Артём Романович**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-a-1=0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№ 1

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – члены геом. прогрессии

$$\frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}=10 \qquad (1)$$

$$\frac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4}=90 \qquad (2)$$

] q – знаменатель прогрессии

$\cancel{b_1q+b_1q}$
$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3=40 \\ b_1q^2+b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5=\cancel{90}\ 360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3=40 \\ (b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3)q^2=360 \end{cases}$$

Значит $q^2=9$, $\Rightarrow q=\pm 3$

1) Если $q=-3$, то $\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{b_1((-3)^4-1)}{-3-1}$

(преобр. (1) по формуле суммы первых n членов геом. прогрессии)

$\frac{b_1\cdot 80}{-4}=40$, $\Rightarrow b_1=-2$, т.е. $b_6=b_1q^5=$

$=-2\cdot(-3)^5=2\cdot 243=486$

2) Если $q=3$, то $\frac{b_1(3^4-1)}{3-1}=40$, $\Rightarrow b_1=1$, т.е.

$b_6=b_1q^5=1\cdot 243=243$

Ответ: $b_6=243$ или $b_6=486$

№ 2

$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)$ $\qquad$ ОДЗ: $x \in R$

$x^\circ = \frac{x^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi x}{180}$

$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{36}\right)$

Воспользуемся формулой преобр. разности синусов в произведение:

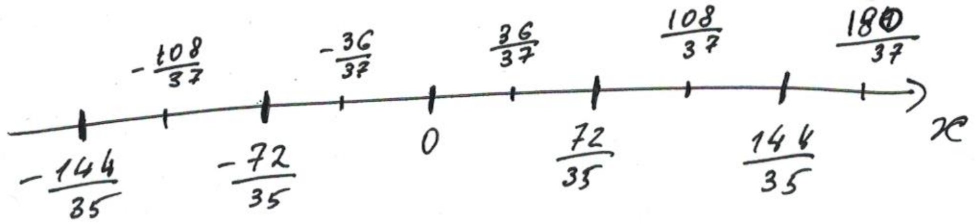
$$2\sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2}\cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{36}}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2}\cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{36}}{2} = 0$$

$$\cancel{\frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2}} = \left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2} = 0 \\ \cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{36}}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2} = \pi m, m \in Z \\ \frac{\pi x + \frac{\pi x}{36}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{x}{36} = 2m, m \in Z \\ x + \frac{x}{36} = 1 + 2l, l \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{35}{36}x = 2m, m \in Z \\ \frac{37}{36}x = 1 + 2l, l \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{72m}{35}, m \in Z \\ x = \frac{72}{37}l + \frac{36}{37}, l \in Z \end{array}\right.$$



На оси Ox снизу изображены решения, соотв. серии, задаваемой параметром m, сверху — l (изобр. несколько подряд идущих корней).

В силу симметрии каждой из серий относительно 0,

№ 2 (продолжение)

которые располагаются правее 0 (т.к. расстояние между положит. и соотв. им отриц. корнями равны).

ρ – расстояние между какими-либо корнями

ρ_1 – расст. между $x=0$ и $x=\frac{36}{37}$

$\rho_1 = \frac{36}{37}$

ρ_2 – между $x=\frac{36}{37}$ и $x=\frac{72}{35}$

$$\rho_2 = \frac{72}{35} - \frac{36}{37} = \frac{72\cdot 37 - 35\cdot 36}{35\cdot 37} = \frac{2664-1260}{1295} =$$

$$\begin{array}{r} \times\, 72 \\ 37 \\ \hline 504 \\ 216 \\ \hline 2664 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 35 \\ 36 \\ \hline 210 \\ 105 \\ \hline 1260 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 35 \\ 37 \\ \hline 245 \\ 105 \\ \hline 1295 \end{array} \qquad = \frac{1404}{1295} > 1$$

ρ_3 – между $x=\frac{72}{35}$ и $x=\frac{108}{37}$

$$\rho_3 = \cancel{\rho_1}\ \frac{108}{37} - \frac{72}{35} = \frac{36}{37} + \frac{72}{37} - 0 - \frac{72}{35} = \rho_1 + \frac{72}{37} - \frac{72}{35} =$$

$$= \rho_1 + 72\left(\frac{35-37}{35\cdot 37}\right) = \rho_1 - \frac{144}{1295}$$

$$\rho_{2n+1} = \rho_{2n-1} - \frac{144}{1295}$$

Необх. понять когда величина $\left|\frac{36}{37} - \frac{144}{1295}k\right|$ будет наим., где k – кол-во вычит.

$$\left|\frac{36\cdot 35 - 144k}{1295}\right| = \cancel{1180}\left|\frac{1260-144k}{1295}\right|$$

Проверим $k=8$: $\left|\frac{1260-1152}{1295}\right| = \frac{108}{1295}$ Ответ: $\frac{36}{1295}$

Проверим $k=9$: $\left|\frac{1260-1296}{1295}\right| = \frac{36}{1295}$

При ув. k мод. иск. велич. будет увел. Значит, ~~расст~~ расст. между 2-мя корнями равно 36 Ответ: 36

№3

Введём обозначения: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$

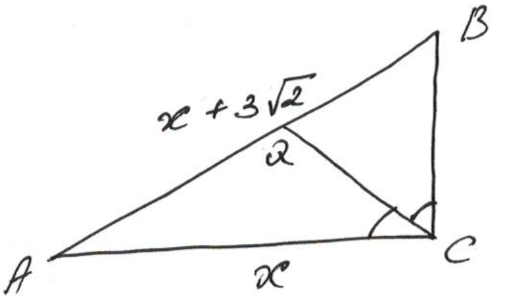
Не теряя общности $\alpha < \beta < \gamma$.

$\beta = 2\alpha$

Возможно 2 случая $\gamma = 3\alpha$ и $\gamma = 6\alpha$

1) $\gamma = 3\alpha$. Тогда $\angle A + \angle B + \angle C = \alpha + 2\alpha + 3\alpha =$
$= 6\alpha$, $\Rightarrow 6\alpha = 180^\circ$ и $\alpha = 30^\circ$.

$\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$



Известно, что напротив большего ~~уг~~ угла лежит большая сторона, напротив меньшего – меньшая, среднего – средняя.

$\exists\ AC = x$. Тогда $AB = x + 3\sqrt{2}$

CQ – биссектриса $\angle ACB$.

$$\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{x}{x+3\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{x+3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = x\sqrt{3} + 3\sqrt{6} \Rightarrow x(2-\sqrt{3}) = 3\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}},$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{4-3} \Rightarrow x = 6\sqrt{6} + 3\sqrt{18} \Rightarrow x = 6\sqrt{6} + 9\sqrt{2}$$

$AB = 6\sqrt{6} + 12\sqrt{2}$

$\angle AQC = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

$$\sin\angle AQC = \sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ +$$
$$+ \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

По т. синусов: $\frac{AC}{\sin\angle AQC} = \frac{QC}{\sin\angle QAC} \Rightarrow QC = \frac{AC\sin\angle QAC}{\sin\angle AQC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow QC = \frac{(6\sqrt{6} + 9\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}(6\sqrt{3}+9)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \cancel{2\cdot 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\cdot 3(2\sqrt{3}+3)}{\sqrt{3}+1} = \frac{12\sqrt{3}+18}{\sqrt{3}+1}$$

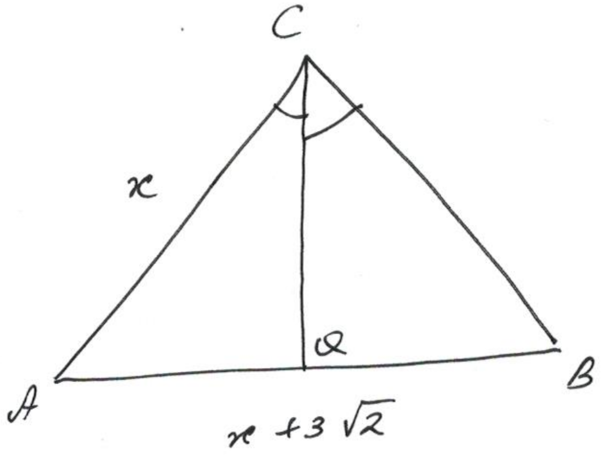
№ 3 (продолжение)

2) $\gamma = 6\alpha$ (т.е. $\gamma = 3\beta$)

$\angle A + \angle B + \angle C = 6\alpha + 2\alpha + \alpha = 9\alpha$

$\alpha = 20^\circ$

$\angle C = 120^\circ$



По т. синусов $\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{x + 3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}$

$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (x + 3\sqrt{2}) \sin 40^\circ$

$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - x \cdot \sin 40^\circ = 3\sqrt{2} \sin 40^\circ$

$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right) = 3\sqrt{2} \sin 40^\circ$

$\cancel{x = \frac{3\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ $\cancel{x = 3\sqrt{2} +}$

$x = \frac{3\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}$

По т. синусов: $\frac{AC}{\sin \angle AQC} = \frac{CQ}{\sin \angle CAQ}$

$CQ = \frac{AC \cdot \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$

$\cancel{CQ = 3\sqrt{2}}$ $CQ = \frac{6\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$

Ответ: $CQ = \frac{12\sqrt{3} + 18}{\sqrt{3} + 1}$ или $CQ = \frac{6\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$

№ 4

$a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

$3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - (a+1) = 0$

1) $a = -6$: $\cancel{3x^2 + x}$ $3x^3 - 5x^2 - 3x + 5 = 0$

$3x(x^2 - 1) - 5(x^2 - 1) = 0$

Есть 3 корня и 2 целых (± 1)

2) $a = -5$: $3x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0$

Корни будут целыми, если они явл. делителями св. члена.

целых к. ~~нет~~ только один ($x = -1$)

3) $a = -4$: $3x^3 + x^2 + x + 3 = 0$

$\cancel{3(\ 3x(x^3+1) + x(x+1)}$ $3(x^3+1) + x(x+1) = 0$

$3(x+1)(x^2 - x + 1) + x(x+1) = 0$

$(x+1)(3x^2 - 3x + 3 + x) = 0$

$(x+1)(3x^2 - 2x + 3) = 0$

$D < 0$, $\Rightarrow$ только один целый корень

4) $a = -3$: $3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$

ц. к. только один ($x = -1$)

5) $a = -2$: $3x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0$

ц. к. только один (-1)

6) $a = -1$: $3x^3 + 10x^2 + 7x = 0$

$x(3x^2 + 10x + 7) = 0$

$D = 100 - 3 \cdot 7 \cdot 4 = 100 - 84 = 16$

$x = \frac{-10 \pm 4}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{14}{6} \\ x = -1 \end{array}\right.$

Есть 3 корня, 2 целых ($x = -1$ и $x = 0$)

7) $a = 0$: $3x^3 + 13x^2 + 9x - 1 = 0$

Есть только один целый корень ($x = -1$)

№4 (продолжение)

8) $a=1: 3x^3+16x^2+11x-2=0$

Только 1 ц. к. $(x=-1)$

$f(x)=3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-a-1=0$

$f(-1)=0$

9) $a=2: 3x^3+19x^2+13x-3=0$

Один ц. к. $(x=-1)$

10) $a=3: 3x^3+21x^2+15x-4$

Только один ц. к. $(x=-1)$

11) $a=4: 3x^3+25x^2+17x-5=0$

Только один ц. к. $(x=-1)$

12) $a=5: 3x^3+28x^2+19x-6=0$

Только один ц. к. $(x=-1)$

Кол-во корней опр. подст. вместо x делит. св. члена.

Для двух знач. a из пром. вып. условие.

$P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Ответ: $\cancel{\frac{1}{12}}$ $\frac{1}{6}$

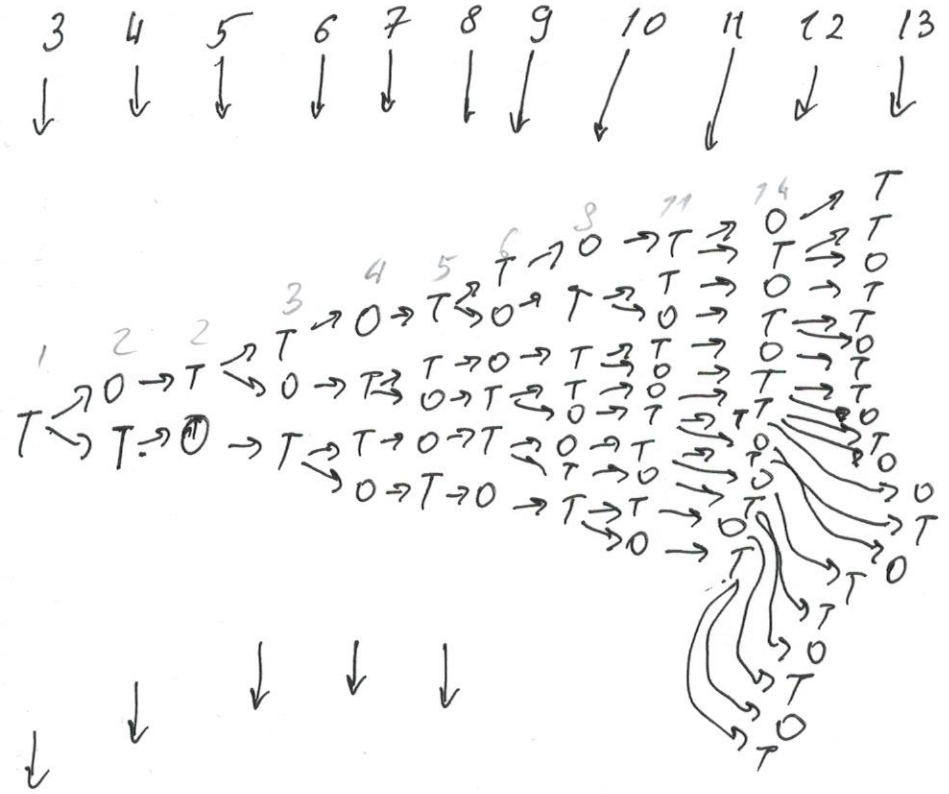
№ 5

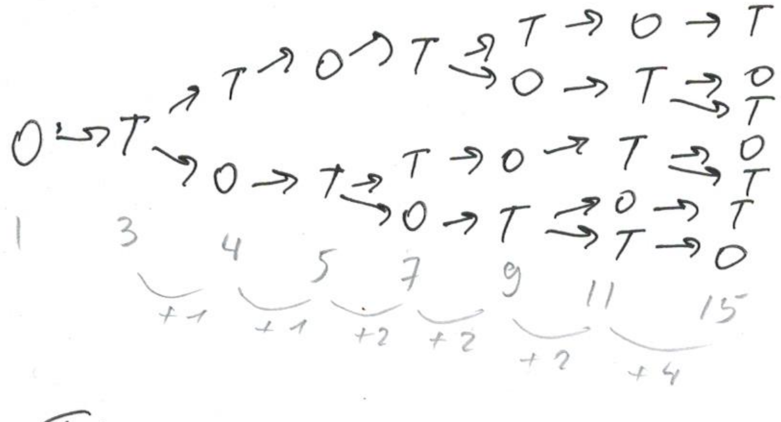
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

Т О

О Т _

1, 2, 21, 22 позиции опред. однозначно





Продолж. дерево можно придти к ответу