МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Якуничева Олеся Сергеевна**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№ 1.

a_1 = первый член прогрессии
a_6 = шестой член прогрессии.
q -

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 + aq^3 = 60 \Rightarrow a(1+q+q^2+q^3)=60 \\ aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 = 240 \Rightarrow aq^2(1+q+q^2+q^3)=240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(1+q+q^2+q^3)=60 \\ aq^2(1+q+q^2+q^3)=240 \end{cases}$$

$$4a(1+q+q^2(1+q)) = aq^2(1+q+q^2(q+1))$$

$$4a(1+q)(1+q^2) = aq^2(1+q)(1+q^2)$$

$$(1+q)(1+q^2)(4a-aq^2)=0$$

$q=-1$ $\quad q^2 \neq -1$ $\quad 4a = aq^2$

$a(4-q^2)=0$

$a \neq 0 \Rightarrow q^2 = 4$

$q = \pm 2$

При $q = 2$

$a(1+2+4+8)=60 \Rightarrow a = 4$, тогда

$a_6 = 4 \cdot 32 = 128$

$$\begin{array}{r} \times\, 12 \\ 32 \\ \hline 24 \\ 36 \\ \hline 384 \end{array}$$

При $q = -2$

$a(1-2+4-8)=60 \Rightarrow a = -12$, тогда

$a_6 = -12 \cdot (-32) = 12 \cdot 32 = 384$

Ответ: 384 ; 128

№2

Найти расстояние между ближ. друг к другу корнями

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$$

$$\sin(\pi x) - \sin(3x^\circ) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{\pi x - 3x^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x + 3x^\circ}{2}\right) = 0$$

1) $\pi x - 3x^\circ = 2\pi k$

2) $\frac{\pi x + 3x^\circ}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\begin{cases} \pi x - 3x^\circ = 2\pi k \\ \pi x + 3x^\circ = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x + \frac{\pi}{60}x = \pi + 2\pi k \\ \pi x - \frac{\pi}{60}x = \pi k \end{cases}$$

$x + \frac{x}{60} = 1 + 2k \mid \cdot 60$

$61x = 60 + 120k$

$x = \frac{60 + 120k}{61}$

$x - \frac{x}{60} = 2k \mid \cdot 60$

$59x = 120k$

$x = \frac{120k}{59}$

d между x_1 и x_2 $= \frac{120}{61}$

d между x_1 и x_2 $= \frac{120}{59}$

где x_1 и x_2 - соседние корни.

3) $x_1 = \frac{60 + 120k}{61}$

$x_2 = \frac{120k_1}{59}$

$$d = |x_1 - x_2| = \left|\frac{60 + 120k}{61} - \frac{120k_1}{59}\right| = \left|\frac{3540 + 7080k - 7320k_1}{61 \cdot 59}\right| =$$

№2

Найти расстояние между ближ. друг к другу корнями

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$$

$$\sin(\pi x) - \sin(3x^\circ) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{\pi x - 3x^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + 3x^\circ}{2}\right) = 0$$

1) $\pi x - 3x^\circ = 2\pi k$

2) $\frac{\pi x + 3x^\circ}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\begin{cases} \pi x - 3x^\circ = 2\pi k \\ \pi x + 3x^\circ = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x + \frac{\pi}{60} x = \pi + 2\pi k \\ \pi x - \frac{\pi}{60} x = \pi k \end{cases}$$

$x + \frac{x}{60} = 1 + 2k \mid \cdot 60$

$61x = 60 + 120k$

$x = \frac{60 + 120k}{61}$

$x - \frac{x}{60} = 2k \mid \cdot 60$

$59x = 120k$

$x = \frac{120k}{59}$

d между x_1 и x_2 $= \frac{120}{61}$

d между x_1 и x_2 $= \frac{120}{59}$

где x_1 и x_2 - соседние корни.

3) $x_1 = \frac{60 + 120k}{61}$

$x_2 = \frac{120k_1}{59}$

$$d = |x_1 - x_2| = \left| \frac{60 + 120k}{61} - \frac{120k_1}{59} \right| = \left| \frac{3540 + 7080k - 7320k_1}{61 \cdot 59} \right| =$$

№2

продолжение

$$= \frac{60}{3599} \left| 118k - 122k_1 + 59 \right| , k; k_1 \in \mathbb{Z}$$

4) Для того, чтобы найти наименьшее расстояние, надо найти минимальное значение модуля.

Число под модулем целое и $\neq 0$ (т.к. 118 и 122 - четные, 59 - нечетное)

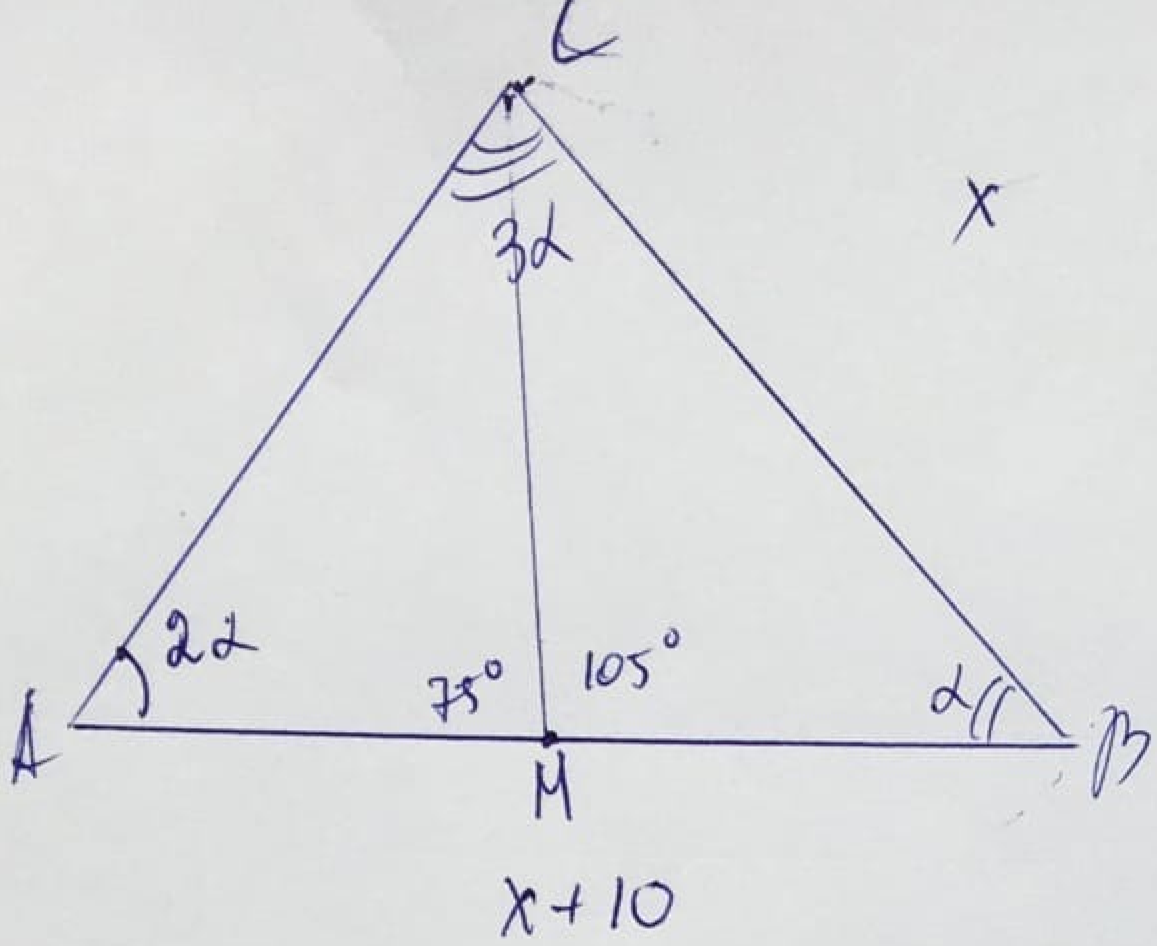
Минимальное значение модуля = 1 (его можно получить при $k = 45$, $k_1 = 44$), тогда

$$d = \frac{60}{3599} \cdot |1| = \frac{60}{3599}$$

Ответ: $\frac{60}{3599}$

№3

1)



Учитывая условие есть два подходящих случая:

Дано:
CM – биссектриса.
CB = AB − 10.

$x = (10+x)\cdot\cos 30$

$x = (10+x)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 5\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 30+20\sqrt{3}$

1) Обозначим $CB = x$, тогда $AB = x+10$

$\angle B = \alpha$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 3\alpha$, тогда

$6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ, \angle B = 30^\circ, \angle C = 90^\circ$

2) $\angle CMB = 180 - (45+30) = 105^\circ \Rightarrow \angle AMC = 75^\circ$

3) По т. синусов в $\triangle MCB$ $\dfrac{x}{\sin 105} = \dfrac{CM}{\sin 30} \Rightarrow CM = \dfrac{x\cdot\frac{1}{2}}{\sin 105} = \dfrac{(30+20\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\sin 105 = \cos 15 = \sqrt{\dfrac{1+\cos 30}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

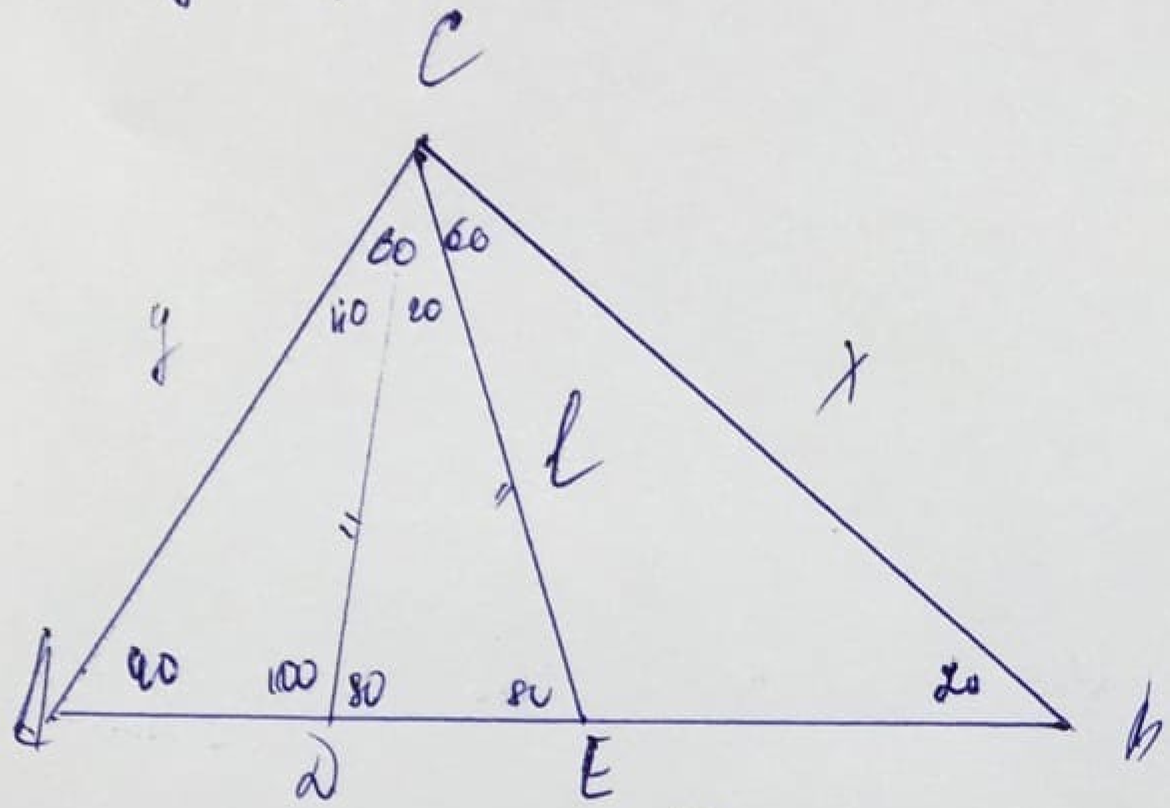
$\Rightarrow CM = \dfrac{(30+20\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})(2-\sqrt{3})} =$

$= \dfrac{(30+20\sqrt{3})\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}} = (30+20\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Ответ: $(30+20\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$

№3

2 случай)



1) Обозначим $\angle B = \alpha$

$\angle A = 2\alpha \Rightarrow \angle C = 6\alpha$

$9\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 20$,

тогда: $\angle A = 40$

$\angle B = 20$

$\angle C = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CEB = 100$

$\angle CEA = 80$

2) Проведем $CD = CE$, тогда $\angle CDE = 80 \Rightarrow \angle ADC = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD = 40^\circ \Rightarrow \angle DCE = 20^\circ$

3) в $\triangle CDB$: по т. синусов $\frac{CD}{\sin 20} = \frac{x}{\sin 80} \Rightarrow$

$CD = \frac{x \sin 20}{\sin 80}$

$AB = x + 10 = AD + DB = CD + CB = CD + x$

$x + 10 = x + \frac{x \cdot \sin 20}{\sin 80} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot \sin 80}{\sin 20}$

$l = \frac{2xy}{x+y}\cos 60 = \frac{2x \cdot \frac{x}{2\cos 20}}{x + \frac{x}{2\cos 20}} \cdot \cos 60 =$

$= \frac{2x^2 2\cos 20}{2\cos 20\,(2\cos 20 + 1)\,x} \cdot \cos 60 = \frac{x \cdot \cos 60}{2\cos 20 + 1}$

4) $\frac{x\cos 60}{2\cos 20 + 1} = \frac{2x}{2\cos 20 + 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 10 \sin 80 \cdot \frac{1}{2}}{\sin 20\,(2\cos 20 + 1)} =$

$= \frac{2 \cdot 10 \sin 80 \cdot \frac{1}{2}}{\sin 40 + \sin 20} = \frac{2 \cdot 5 \sin 80}{2 \sin 30 \cos 10} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sin(90-10)}{2 \cdot \frac{1}{2}\cos 10} = 10$

Ответ: 10

№4

$$3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=0$$

$$3x^3-3ax^2+4x^2-2ax+3x+a+2=0$$

$$3x^3-3ax^2+ax-3ax+x^2+3x+2x+x+a+2=0$$

$$x(3x^2-3ax+a+x+2)+(3x^2-3ax+a+x+2)=0$$

$$(3x^2-3ax+a+x+2)(x+1)=0$$

Тогда получаем, что $x=-1$ – корень, который будет сущ-ть всегда. Рассм. $3x^2-3ax+a+x+2$.

$$3x^2-3ax+a+x+2=0$$

При $x=-1$: $3+3a+a+1=0$

$4a=-4 \Rightarrow a=-1$ –

не подходит, т.к. по условию корни различны.

Найдем корни $3x^2-3ax+a+x+2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{3a-1\pm\sqrt{9a^2-18a-23}}{6}$$

По условию нам необходимы целые корни $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{9a^2-18a-23}$ – целое $\Rightarrow 9a^2-18a-23$ – кв. числа

Из промежутка $[-5;6]$ выберем подходящие a.

$a=-5$ $\sqrt{25\cdot 9+90-23}$ не целое

$a=-4$ $\sqrt{9\cdot 16+72-23}$ не целое

$a=-3$ $\sqrt{9\cdot 9+54-23}$ не целое

$a=-2$ $\sqrt{9\cdot 4+36-23}=\sqrt{49}=7$ подх.

$a=0$ $\sqrt{-23}$ нет.

$a=1$ $\sqrt{9-18-23}$ нет.

$a=2$ $\sqrt{36-36-23}$ нет

$a=3$ $\sqrt{81-77}=\sqrt{4}=2$ подх

$a=4$ $\sqrt{49}\Rightarrow$ подх.

$a=5,6$ не подх.

Тогда (продолжение) получаем, что выражение явл. квадратом числа при $a=-1$; $a=-2$, $a=3$; $a=4$

$a=-1$ не подх. (описано выше). Рассмотрим остальные a:

1) $a=-2$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{36+36-23}}{6} = \frac{-7\pm 7}{6}$$

$x_1 = 0$ – целое → подходит

$x_2 = -\frac{14}{6}$ не подх

2) $a=3$

$$\cancel{x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{81-77}}{6} = \frac{7 \pm 2}{6}}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{81-77}}{6} = \frac{8\pm 2}{6}$$

$x_1 = \frac{10}{8}$ – не подх.

$x_2 = 1$ – подх, т.к. целое

3) $a=4$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6}$$

$x_1 = 3$ подх., т.к. целое

$x_2 = \frac{4}{6}$ не подх.

Тогда при $a=-2$; $a=3$ и $a=4$ мы имеем целые корни => они подходят. Всего 3 значения a. В промежутке $[-5;6]$ всего 12 чисел, нам подходит 3 => вероятность $= 3/12 = 1/4 = 0{,}25$

Ответ: 0,25

№5

Нам сказано, что слово начинается с буквы А.

$A\overbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}^{19}$

Рассм. возможные далее действия:

1б	2б	3б	4б	5б	6б	7б
			Б	А		
	Б	А	Б	Б	А	
А						
	Б	Б	А	Б	А	
				Б	Б	А

Заметим, что мы всегда можем прибавлять либо 2 буквы (БА), либо 3 (ББА), тогда задача сводится к тому, чтобы найти кол-во представлений 19 (т.к. одна буква уже есть) в виде 2 и 3.

1	$19-3\cdot1=16=2\cdot8 \Rightarrow C_1^9=9$ вар.
2	$19-2\cdot3=13 \not\vdots\, 2$
3	$19-3\cdot3=10=2\cdot5 \Rightarrow C_3^8=56$ вар.
4	$19-3\cdot4=7 \not\vdots\, 2$
5	$19-3\cdot5=4=2\cdot2 \Rightarrow C_5^7=21$ вар.
6	$19-3\cdot6=1 \not\vdots\, 2$

Всего $=9+21+56=$
$=30+56=$
$=86$ вар.

Ответ: 86.