



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Васильев Григорий Андреевич**

Технический балл: **80**

Дата: **1 марта 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьевы горы» для 10-11 классов

Вариант 6-2

1. Что больше: число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ или наибольший корень уравнения $2021x^2 - 2020x - 1 = 0$?
2. Точка O является центром окружности, касающейся двух сторон треугольника ABC , и лежит на стороне BC . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $OB = 3$, $OC = 4$, $AC = 8$.
3. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{9}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 1, \\ x\sqrt{xy} + 90 = -y\sqrt{xy}. \end{cases}$$

4. Цилиндрическую кружку радиуса 1 и высоты 3, наполненную доверху водой, наклонили на угол 30° . Найдите отношение объема оставшейся воды к исходному объему.
5. Найдите все значения p , при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 8}} \leq \sqrt{p}$$

выполняется при всех значениях x .

февраль-март 2020 г.

① $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ Черневик

$$\sqrt{5}+2=t \quad \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{\frac{1}{t}}$$

$$\sqrt{5}-2=\frac{1}{t}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}{1} = \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})^2 + 1 + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^2}{4} = \frac{\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + 1 + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}}{4}$$

$$2021x^2 - 2020x - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2020}{2021}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2021}$$

$$D = 2020 \cdot 2020 + 4 \cdot 2021 = 4(505 \cdot 2020 + 2021)$$

$$(x=1) \rightarrow 2021 - 2020 - 1 = 0$$

$x=1$ — наиб.

$$\begin{array}{r} 2020 \overline{) 2020} \\ \times 505 \\ \hline \end{array}$$

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

$$(2, 1)$$

$$9+4\sqrt{5}=t$$

$$\sqrt[3]{t} + \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \geq 2$$

$$100 + \frac{1}{100} \geq 2\sqrt{100}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq$$

$$\frac{t + \frac{1}{t}}{2} \leq \sqrt{\frac{t^2 + \frac{1}{t^2}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5+2} - \sqrt[3]{5-2}}{4}$$

1 Черновик



$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$4 \quad (\sqrt{5}+2)^{2/3} + 1 + (\sqrt{5}-2)^{2/3}$$

$$3 \quad (\sqrt{5}+2)^{2/3} + (\sqrt{5}-2)^{2/3}$$

~~4~~

~~2~~

3

$$(9+4\sqrt{5})^{1/3} + (9-4\sqrt{5})^{1/3}$$

$\underbrace{\quad}_{8,3} \quad \underbrace{\quad}_{8,3}$
 $\underbrace{\quad}_{17,3 \approx}$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ \hline \times 625 \\ \hline 3125 \\ 1250 \\ \hline 15625 \end{array}$$

$$\cancel{9+4\sqrt{5}} \quad f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{x}$$

3

$$f(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}})$$

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} < 9+4\sqrt{5}$$

$$= \frac{25+4}{10} = 2,9$$

$$3+\sqrt{5} < 18+8\sqrt{5} \quad 3 = x + \frac{1}{x} \quad | \cdot x$$

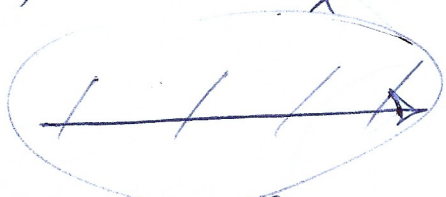
$$0 = x^2 - 3x + 1$$

$$f(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}) > f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad D = 9-4=5$$

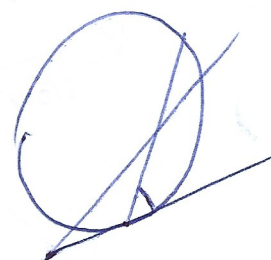
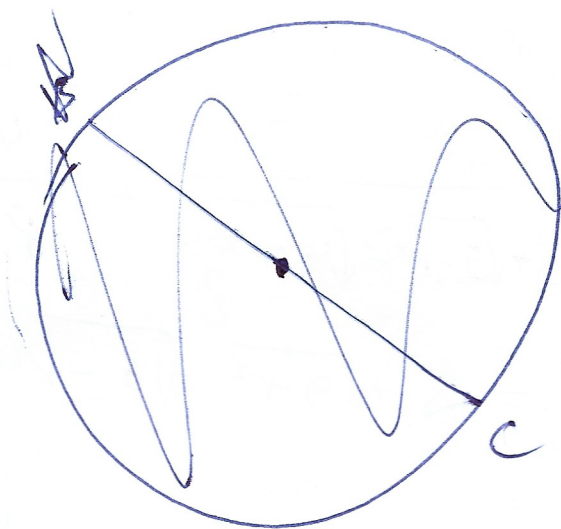
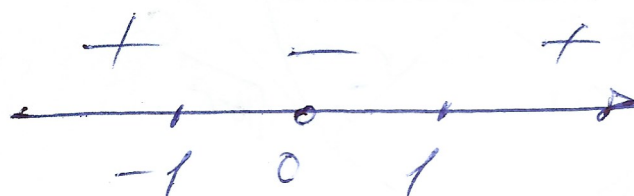
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Шифр

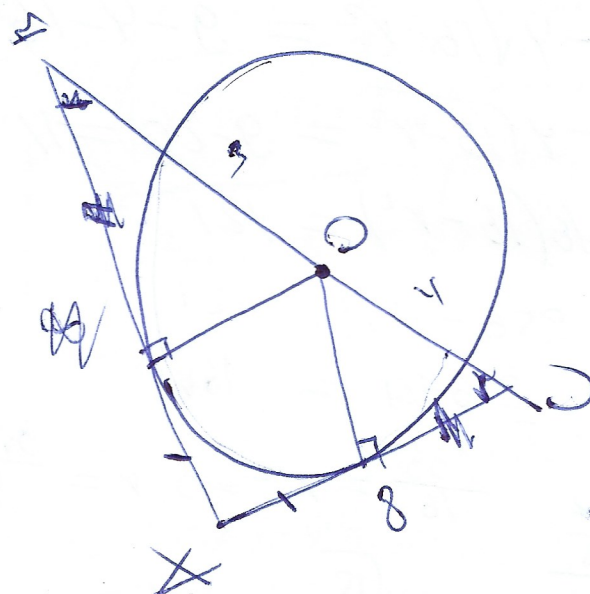
② $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{2x \cdot x - x^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$ Черновик

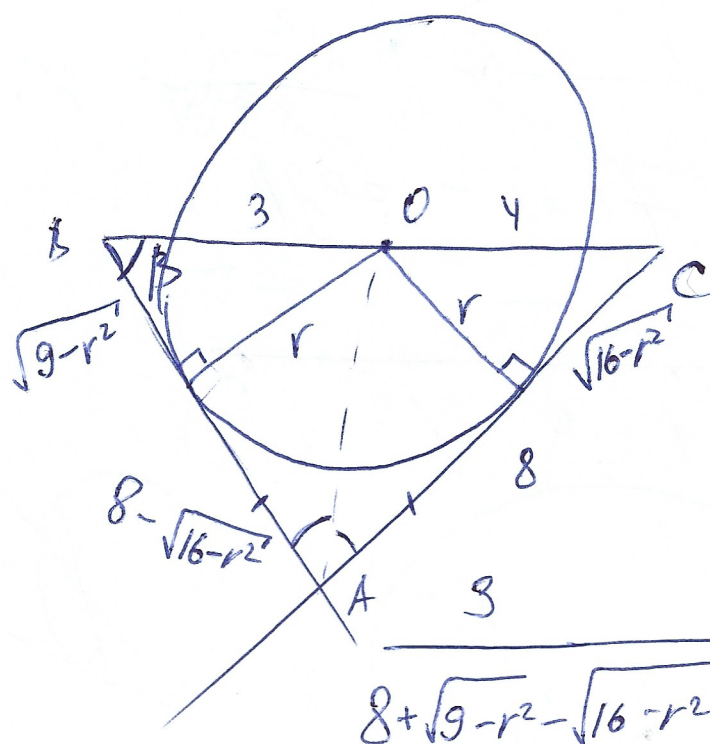
$\Rightarrow$  $\frac{x^2-1}{x^2} =$
 $f(x) - \text{возр.}$

②



$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$





$$6 = 8 + \sqrt{9 - r^2} - \sqrt{16 - r^2}$$

$$\sqrt{16 - v^2} - 2 = \sqrt{9 - v^2}$$

$$(16 - r^2) - 2\sqrt{16 - r^2 + 4} = 9 - r^2$$

$$-4\sqrt{16-r^2} = 9-4-16 \quad \begin{array}{r} 256 \\ 127 \end{array}$$

$$-4\sqrt{16-r^2} = 9-20 = -11$$

$$16(16 - r^2) = 121$$

$$256 - 16v^2 = 121$$

$$256 - 21 = 16v^2$$

$$\frac{135}{16} = r^2 \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{\frac{3\sqrt{15}}{4}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow R = \frac{8}{2 \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

③

$$\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{9}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 1$$

Черновик

$$x\sqrt{xy} + 90 = -y\sqrt{xy} \quad \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right]$$

$$(x+y)\sqrt{xy} = -90 \quad \begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} \left(1 + \frac{9}{y} - x \right) = 1$$

$$\cancel{\sqrt{\frac{y}{x}}} + \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{9}{\frac{-90}{x+y}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{x+y}{10} = 1$$

④

⑤

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}$$

$$\sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8} \leq 2\sqrt{\frac{2x^2+10x+21}{2}}$$

$$\sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8} \geq 2\sqrt{\frac{(x^2+6x+13)(x^2+4x+8)}{2}}$$

$$(x^2+6x+13)(x^2+4x+8) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 6x^3 + 24x^2 + 48x$$

$$+ 13x^2 + 52x + 104 = x^4 + 10x^3 + 45x^2 + 100x + 104$$

$$\sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8} \geq 2 \quad \text{уравнение}$$

$$(x^4+10x^3+45x^2+100x+104)$$

$$(3) \int \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{9}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x\sqrt{xy} + 90 = -y\sqrt{xy} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int x > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (x+y)\sqrt{xy} = -90$$

$$\Downarrow$$

$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$(1) \cdot \sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{y^2} - 9 + \sqrt{x^2} = \sqrt{xy}$$

$$-y - 9 - x = \sqrt{xy}$$

$$-y - 9 - x = \frac{-90}{x+y} \quad | \cdot (x+y)$$

$$-(x+y)^2 - 9(x+y) + 90 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 90 = 9 \cdot 9 + 9 \cdot 40 =$$

$$= 9 \cdot 49$$

$$x+y = \frac{9 \pm (3 \cdot 7)}{-2} = \frac{9 \pm 21}{-2} = -15; 6$$

$$x+y < 0 \Rightarrow x+y = -15$$

$$\sqrt{xy} = \frac{-90}{-15} = 6 \Rightarrow xy = 36$$

$$\begin{cases} x+y = -15 \\ xy = 36 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$y = -15 - x$$

$$\Rightarrow x(-15-x) = 36$$

$$-x^2 - 15x - 36 = 0$$

$$D = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 9(25 - 16) =$$

$$= 9 \cdot 9$$

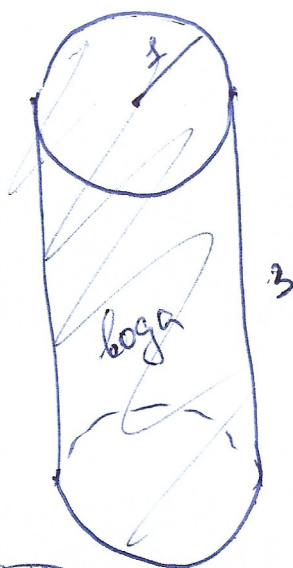
Черновик

$$x = \frac{15 \pm 9}{-2} = -12; -3$$

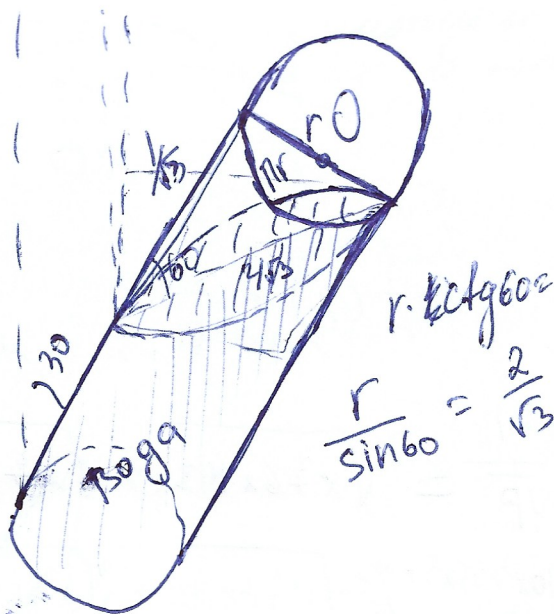
$$x = -12 \quad y = -15 - (-12) = -3$$

$$x = -3 \quad y = -15 - (-3) = -12$$

4



П.3



$$r \cdot \cot 60^\circ$$

$$\frac{r}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5

1

$$\sqrt{x^2 + 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \leq \sqrt{p}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \right) - \left(\frac{(2x+6)}{2\sqrt{x^2 + 6x + 13}} + \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 8}} \right)$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \right)^2$$

Серновик

$$\frac{x^2+6x+13-x-3}{\sqrt{x^2+6x+13}} + \frac{x^2+4x+8-x-2}{\sqrt{x^2+4x+8}} =$$

$$= \frac{x^2+5x+10}{\sqrt{x^2+6x+13}} + \frac{x^2+3x+6}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

> 0

1 1 2 1
1 3 3 1

 $f(x) \uparrow$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}$$

$$2(x^4+10x^3+45x^2+100x+104)^{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq 2(x^4+10x^3+45x^2+100x+104)^{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(4x^3+30x^2+90x+100)}{4(x^4+10x^3+45x^2+100x+104)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2x^3+30x^2+90x+100}{(x^4+10x^3+45x^2+100x+104)^{\frac{3}{4}}}$$

$$(2x+1)^2 = 2(2x+1) \cdot 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}$$

Чистовик

$$(1) \quad 2021x^2 - 2020x - 1 = 0 \quad \sqrt{5} + 2 \text{ и } \sqrt{5} - 2 - \text{обр.}$$

По т. Виета: $x_1 + x_2 = \frac{2020}{2021} \quad (\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2) = 1$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{2021} \Rightarrow \text{один корень } > 0, \text{ другой } < 0$$

Сред. корень 1 $\Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow$ другой корень $< 0 \Rightarrow$

1 - наиб. корень

То есть, нужно сравнить

$$1 \quad \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}}{1} \quad \begin{array}{l} \text{Рассмотрим и} \\ \text{исполн. и доказат. на} \\ (\sqrt{5}+2)^{2/3} + 1 + (\sqrt{5}-2)^{2/3}, \\ \text{чтобы содр. разность} \\ \text{3-их чисел.} \end{array}$$

$$1 \quad \frac{(\sqrt{5}+2)^{2/3} + 1 + (\sqrt{5}-2)^{2/3}}{4} > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(9+4\sqrt{5})^{1/3} + 1 + (9-4\sqrt{5})^{1/3} \quad \text{и } (\Rightarrow)$$

$$(9+4\sqrt{5})^{1/3} + (9-4\sqrt{5})^{1/3} \quad 3$$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, тогда левая часть это

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} \quad f((9+4\sqrt{5})^{1/3})$$

$\Rightarrow$ при $x > 1$ $f(x)$ возрастает

$$3 = x + \frac{1}{x}$$

$$\Downarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \text{обр.}, \text{ нужно}$$

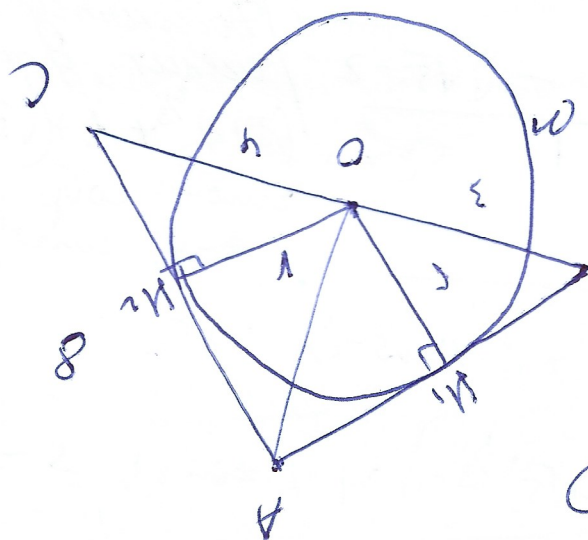
сравнить $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$\frac{(3+\sqrt{5})^3}{8} \neq 9 + 4\sqrt{5} \quad (\Rightarrow) \quad 27 + 27\sqrt{5} + 9 \cdot 5 + 5\sqrt{5} \neq 72 + 32\sqrt{5}$$

$$27 + 45 + 32\sqrt{5} \neq 72 + 32\sqrt{5} \quad (\Rightarrow) \quad 72 = 72, \text{ то есть}$$

Ответ: Эти числа равны

2



Н₂-м. перес. в ЧАС

$\Downarrow$
 $\hookrightarrow OH_1 = OH_2 = r$
 $(r - \text{радиус } \omega)$

$$CH_2 = \sqrt{16 - r^2}$$

$$BH_1 = \sqrt{9 - r^2}$$

$$AH_2 = 8 - \sqrt{16 - r^2}$$

(По теор. о рас. уз Γ)

$$AH_2 = AH_1 = 8 - \sqrt{16 - r^2}$$

AO - Гиссекитр. 2A ($OH_1 = OH_2$) $\xrightarrow{\text{потеря об.с.}}$ DC

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OB}{BA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{3}{8 - \sqrt{16 - r^2} + \sqrt{9 - r^2}} \Rightarrow 8 - \sqrt{16 - r^2} + \sqrt{9 - r^2} = 6 (=)$$

$$\sqrt{9-r^2} + 2 = \sqrt{16-r^2} \quad (-)$$

$$9 - r^2 + 4\sqrt{9 - r^2} + 4 = 16 - r^2 \quad (-) \quad 4\sqrt{9 - r^2} = 3 \quad (=) \quad 16 \cdot 9 - 16r^2 = 9 \quad (=)$$

$$\Rightarrow \frac{15.9}{16} = r^2 \Rightarrow r = \frac{3}{4}\sqrt{15} \Rightarrow \sin \angle B = \frac{r}{3} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(1/2 meop. sin)

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{8}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

Ombem: $\frac{16}{\sqrt{15}}$

Чистовик

$$\textcircled{3} \int \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{9}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \quad (1)$$

$$\int \begin{cases} x\sqrt{xy} + 90 = -y\sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{xy} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow (x+y)\sqrt{xy} = -90$$

$$\Downarrow$$

$$x+y < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \sqrt{xy} = \frac{-90}{x+y}$$

$$(1) \cdot \sqrt{xy} \rightarrow \sqrt{y^2} - 9 + \sqrt{x^2} = \sqrt{xy}$$

$$|y| - 9 + |x| = \sqrt{xy}$$

$$-y - 9 - x = \sqrt{xy}$$

$$-(y+x) - 9 = \frac{-90}{x+y} \quad \left| \cdot (x+y) \right. \quad \begin{matrix} -x \neq y \\ x < 0 \\ y < 0 \end{matrix}$$

$$-(x+y)^2 - 9(x+y) + 90 = 0$$

$$D = 9 \cdot 49$$

$$x+y = \frac{9 \pm 3 \cdot 7}{-2} = -15; 6 \rightarrow x+y < 0 \Rightarrow$$

$$x+y = -15$$

$$\begin{cases} x+y = -15 \\ xy = 36 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -15-x \\ -x^2 - 15x - 36 = 0 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} (=)$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{xy} = 6$$

$$\Downarrow$$

$$xy = 36$$

$$\begin{cases} y = -15-x \\ \begin{cases} x = -3 \\ x = -12 \end{cases} \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} (=) \begin{cases} y = -12 \\ x = -3 \\ y = -3 \\ x = -12 \end{cases}$$

Ответ: $x = -12, y = -3$ или $x = -3, y = -12$

Числовик

⑤

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}} \leq \sqrt{p}$$

$$x^2+6x+13 \rightarrow D < 0 \rightarrow x^2+6x+13 \text{ всегда } > 0$$

$$x^2+4x+8 \rightarrow D < 0 \rightarrow x^2+4x+8 \text{ всегда } > 0$$

$$p \geq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}}$$

Узнаем монотонность функции

$$f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8})^2} \cdot \left(\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+13}} + \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+8}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+6x+13} + \sqrt{x^2+4x+8}$$

$$f'(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+13}} + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+13}} = -\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+13} = \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+8}$$

$$\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2+4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2+4}$$

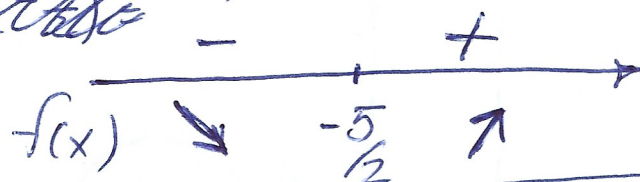
$$(x+3)^2(x+2)^2+4(x+3)^2 = (x+3)^2(x+2)^2+4(x+2)^2$$

$$4(x+3)^2 = 4(x+2)^2$$

$$(x+3)^2 = (x+2)^2$$

$$\begin{cases} x+3 = x+2 \\ x+3 = -x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=2 \rightarrow \text{нев.} \\ x = -\frac{5}{2} \rightarrow \text{тогда экстрем.} \end{cases}$$

Числовик

~~Решение~~ $f'(x)$ 

$$f'(-100) < 0 \Rightarrow \boxed{f(-5/2) - \text{минимум}}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in (-\infty; -5/2) \rightarrow f(x) \text{ убыв.}$$

$$x \in (-5/2; +\infty) \rightarrow f(x) \text{ возраст.}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq f(-5/2)$$

$$f(-5/2) = \sqrt{+\frac{25}{4} - \frac{30}{2} + 13} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{20}{2} + 8} =$$

$$= \sqrt{\frac{25 - 60 + 13 \cdot 4}{4}} + \sqrt{\frac{25 - 40 + 32}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25 - 60 + 52}{4}} + \sqrt{\frac{17 - 40}{4}} = \sqrt{\frac{17 - 60}{4}} + \sqrt{\frac{17}{4}} =$$

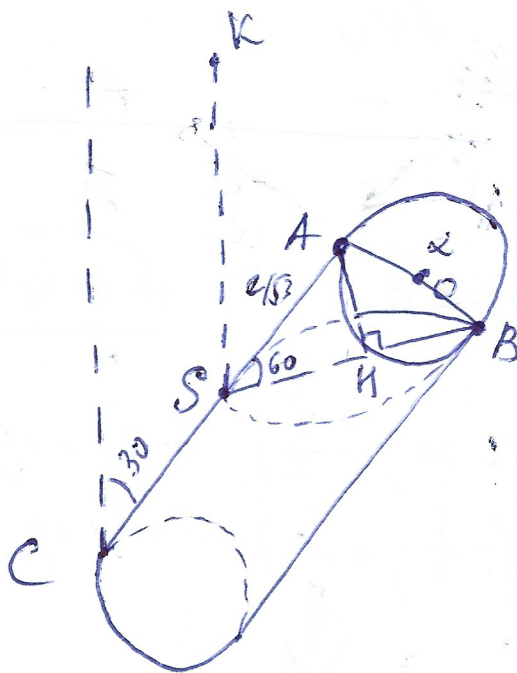
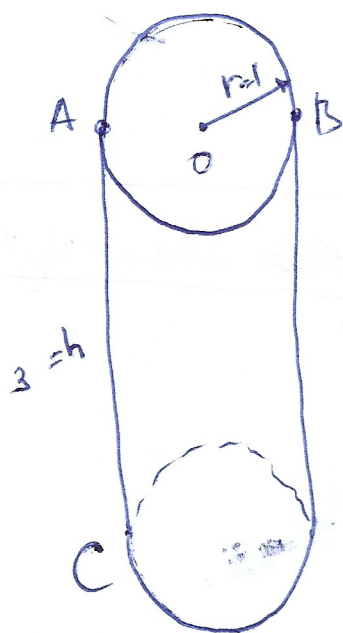
$$= \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{17} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{17}} \leq \sqrt{p} \Rightarrow \frac{1}{17} \leq p$$

$$\text{Ответ: } p \geq \frac{1}{17}$$

Чистовик

4



$$V_{\text{исх}} = \pi r^2 \cdot h = 3\pi$$

Покажем, что вода будет находиться на одном уровне,

то есть $BS \perp SK$. Покажем, что крайняя верх. точка оставшейся вода будет в B.

Покажем, что вода будет находится на одной линии (верх. часть), то есть $BS \perp SK$. $\Rightarrow$

$$\angle ASK = 60^\circ \Rightarrow SB = \frac{2}{\sin 60} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad SA = 2 \cdot \operatorname{ctg} 60 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{SB}} = \frac{AB}{SB} \Rightarrow \overset{\frown}{SB} = \pi \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \quad \quad \quad \downarrow \quad SC = 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi \quad \text{и} \quad \text{и} \quad \text{и} \quad ; \quad AH = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60 = 1$$

Фигура ASB (объем вышней части) будет конусом $\Rightarrow V_{\text{выш}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}$ (или $\frac{\pi}{3}$)

$$V_{\text{выш}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\frac{4}{3} \pi \cdot 1}{3} = \frac{4}{9} \pi \Rightarrow V_{\text{ост}} = 3\pi - \frac{4}{9} \pi =$$

$$= 27 \frac{4}{9} \pi - \frac{4}{9} \pi$$

$$V_{\text{ост}} = 23 \frac{5}{9} \pi$$