МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Моторина Анастасия Дмитриевна**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–1

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_k\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,57\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

1. $b_1 = 1$, тогда $b_{b_2} = b_1 + (b_2 - 1)d$, где d - это шаг арифм. прогрессии

$b_{b_2} = b_1 + (b_2 - b_1)d = b_1 + d^2 = 10 \Leftrightarrow d^2 = 9$

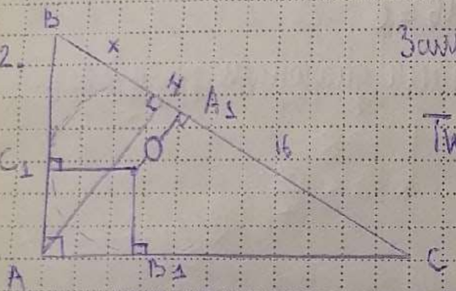
Так как ~~член~~ последовательность возрастающая, то $d > 0$, откуда следует, что $d = 3$.

Тогда $b_3 = 1 + 3 \cdot 2 = 7$, а $b_7 = 1 + 3 \cdot 6 = 19$; $b_{b_{b_3}} = b_{b_7} = b_{19} =$

$= 1 + 3 \cdot 18 = 55$

Ответ: $b_{b_{b_3}} = 55$

2.



Заметим, что $AC_1 = AB_1 = r_{впис}$, т.к. AC_1OB_1 - квадрат

Пусть $BA = a$ и $AC = b$. Тогда

$BC_1 = BA_1 = a - 5$

$A_1C = CB_1 = b - 5$

$BC = BA_1 + A_1C = a + b - 10 = x + 16$

$\Updownarrow$

$a + b = x + 26$

Дано: $CH = 16$ и $r_{впис} = 5$; $\angle BAC = 90°$

Найти: BH - ?

Посчитаем площадь ABC двумя способами:

$$\frac{(a + b + BC)\, r_{впис}}{2} = \frac{ab}{2}; \quad a = \sqrt{BH \cdot BC} \text{ и } b = \sqrt{CH \cdot BC}$$

$$(x + 26 + x + 16)\, 5 = \sqrt{16x}\,(x + 16)$$

$$(10x + 210) = \sqrt{16x}\,(x + 16)$$

$$2{,}5x + 52{,}5 = \sqrt{x}\,(x + 16) \quad | \text{возведем в квадрат} |$$

$$6{,}25x^2 + 262{,}5x + 2756{,}25 = x(x^2 + 32x + 256)$$

$$-25{,}75x^2 + 6{,}5x + 2756{,}25 - x^3 = 0$$

$$(x - 9)(-x^2 - 34{,}75x - 306{,}25) = 0, \text{ причем}$$

$$-x^2 - 34{,}75x - 306{,}25 = 0 \Leftarrow x \in \varnothing, \text{ т.к. } D = -17\frac{7}{16} < 0.$$

Из этого следует, что $x = 9$ (подставив в изн. ур-ие (*))

Ответ: $x = 9$

(*): $10 \cdot 9 + 210 = \sqrt{16 \cdot 9}\,(9 + 16)$

$300 = 12 \cdot 25$

$300 = 300$ чтд

4. Обозначим длины ребер за a, b и c. Тогда без ~~≠~~ уменьшение общности: $a + b = 2020$ и $ab = c$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = c + 1$ (считаем диагональ 2 способами)

$a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + 2c + 1$

$a^2 + b^2 = 2c + 1 = 2ab + 1$

$(a - b)^2 = 1$

$a - b = \pm 1$

Без уменьшения общности: $a - b = 1$, т.к. a и b взаимозаменяемы

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= \frac{2021}{2} \\ b &= \frac{2019}{2} \end{aligned}$$

$D = \frac{2021 \cdot 2019}{4} + 1 = \frac{4080399}{4} + 1 = \frac{4080403}{4}$

Ответ: $D = \frac{4080403}{4}$

5. Перепишем ур-ие $x^2 + a|x-a| = 8x - 15$, как функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 + (a-8)x + 15 - a^2, & x \geq a \\ x^2 - (a+8)x + 15 + a^2, & x < a \end{cases}$ и будем сравнивать её значение с нулем.

I. $x^2 + (a-8)x + 15 - a^2 = 0$

$$x = \frac{8 - a \pm \sqrt{a^2 - 16a + 64 - 60 + 4a}}{2} = \frac{8 - a \pm \sqrt{a^2 - 12a + 4}}{2}$$

Посмотрим выполняется ли условие $(x \geq a)$:

$$\frac{8 - a \pm \sqrt{a^2 - 12a + 4}}{2} \geq a$$

$$\pm\sqrt{a^2 - 12a + 4} \geq 3a - 8$$

II. $x^2 - (a+8)x + 15 + a^2 = 0$

$$x = \frac{a + 8 \pm \sqrt{a^2 + 16a + 64 - 60 - 4a}}{2} = \frac{a + 8 \pm \sqrt{a^2 + 12a + 4}}{2}$$

Посмотрим выполняется ли условие $(x < a)$:

$$\pm\sqrt{a^2 + 12a + 4} < a - 8$$

① $+\sqrt{a^2 - 12a + 4} \geq 3a - 8 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 - 12a + 4 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3a - 8 < 0 \\ \begin{cases} 3a - 8 \geq 0 \\ a^2 - 12a + 4 \geq 9a^2 - 48a + 64 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in (-\infty; 6 - 4\sqrt{2}] \cup [6 + 4\sqrt{2}, +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} a < 8/3 \\ \begin{cases} a \geq 8/3 \\ a \in \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow a \in (-\infty, 6 - 4\sqrt{2}]$, т.к. $8/3 > 6 - 4\sqrt{2}$

$4\sqrt{2} > \frac{10}{3}$

$12\sqrt{2} > 10$

потому что $8a^2 - 36a + 60 \leq 0$

$2a^2 - 9a + 15 \leq 0$

$D = -39 < 0 \Rightarrow$ x

ultimate basics

2) $-\sqrt{a^2-12a+4} \geq 3a-8$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 6-4\sqrt{2}] \cup [6+4\sqrt{2}; +\infty) \\ 3a-8 \leq 0 \\ a^2-12a+4 \leq (8-3a)^2 \leftarrow \text{см. 1)} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 6-4\sqrt{2}] \cup [6+4\sqrt{2}; +\infty) \\ a \leq 8/3 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$a \in (-\infty; 6-4\sqrt{2}]$

3) $+\sqrt{a^2+12a+4} < a-8$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2+12a+4 \geq 0 \\ a-8 > 0 \\ a^2+12a+4 < a^2-16a+64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -6-4\sqrt{2}] \cup [-6+4\sqrt{2}; +\infty) \\ a > 8 \\ a < \frac{15}{7} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$\varnothing$

4) $-\sqrt{a^2+12a+4} < a-8$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; 6-4\sqrt{2}] \cup [-6+4\sqrt{2}; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} a > 8 \\ \begin{cases} a \leq 8 \\ a^2+12a+4 > a^2-16a+64 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -6-4\sqrt{2}] \cup [-6+4\sqrt{2}; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} a > 8 \\ a \in (\frac{15}{7}; 8] \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -6-4\sqrt{2}] \cup [-6+4\sqrt{2}; +\infty) \\ a > \frac{15}{7} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$a \in (\frac{15}{7}; +\infty)$, т.к. $-6+4\sqrt{2} < \frac{15}{7}$

$\Downarrow$

$28\sqrt{2} < 57$

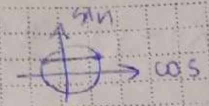
$\sqrt{2} < 2 < \frac{57}{28}$

! Ответ: 2 корня при $a \in (-\infty; 6-4\sqrt{2})$
1 корень при $a \in \{6-4\sqrt{2}\} \cup (\frac{15}{7}; +\infty)$

ultimate basics

3. $\sin(x^2-2{,}57)=\cos(\pi x)$

$\sin(x^2-2{,}57)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$



$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+\pi x-\frac{\pi}{2}-2\pi k-2{,}57=0 \\ x^2-\pi x+\frac{\pi}{2}-2\pi k-\pi-2{,}57=0 \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-\pi\pm\sqrt{\pi^2+2\pi+8\pi k+10{,}28}}{2} \quad (1) \\ x=\frac{\pi\pm\sqrt{\pi^2+8\pi k+2\pi+10{,}28}}{2} \quad (2) \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

(1) Заметим, что мы ищем наим. положительный корень, поэтому рассматриваем только $\frac{-\pi+\sqrt{\ldots}}{2}$, иначе он отриц.

При $k=-1$: $\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}28}}{2}<0$, т.к. $\pi^2-6\pi+10{,}28<\pi^2$

$10{,}28<6\pi$

$10{,}28<18<6\pi$

При $k=0$: $\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+10{,}28}}{2}>0$ – наименьшее в этой серии, т.к. иначе будет увеличиваться значение под корнем

(2) Выбираем $\frac{\pi-\sqrt{\ldots}}{2}$, т.к. с ним получается меньше.

При $k=-2$: $\pi^2-14\pi+10{,}28<0$, т.к. $x^2-14x+10{,}28<0$

$\Updownarrow$

$x\in\left(\frac{35-22\sqrt{2}}{5};\frac{35+22\sqrt{2}}{5}\right)$

и $\pi\in$ –"–.

Корней не существует.

При $k=0$: $\pi^2<\pi^2+2\pi+10{,}28$ => отриц. корень

$0<2\pi+10{,}28$

③ При $K = -1$: $\dfrac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10{,}28}}{2} > 0$ (см. ①)

Осталось сравнить:

$$\frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}28}}{2} \overset{?}{<} \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10{,}28}}{2}$$

$$-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}28} \overset{?}{<} 2 \overset{?}{<} \pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10{,}28}$$

$$\Updownarrow$$

$\pi^2 + 2\pi + 10{,}28 < 4 + 4\pi + \pi^2$ $\qquad$ $\pi^2 - 6\pi + 10{,}28 < \pi^2 - 4\pi + 4$

$10{,}28 < 4 + 2\pi$ $\qquad$ $10{,}28 < 2\pi + 4$

$3{,}14 < \pi$ ч.т.д. $\qquad$ $3{,}14 < \pi$ ч.т.д.

Ответ: наименьший корень $x = \dfrac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}28}}{2}$