МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зиганшин Рамиль Инзарович**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^{\circ})\,?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1=0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Г*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Г*. Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Задание 1.

Пусть b_1 – первый член прогрессии, а q – знамен., тогда i-ый член прогрессии будет равен: $b_1 \cdot q^{(i-1)}$

Сумма первых четырех: $b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 =$
$= b_1(1+q+q^2+q^3)$

Сумма последних четырех: $b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5 =$
$= b_1q^2(1+q+q^2+q^3)$

сред. арифм. первых четырех:

$$\frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4} = 20 \Rightarrow b_1(1+q+q^2+q^3) = 80.$$

сред. арифм. последних четырех

$$\frac{b_1q^2(1+q+q^2+q^3)}{4} = 180 \quad \text{т.е.} \quad b_1q^2(1+q+q^2+q^3) = \cancel{180}\ 720$$

тогда: $q^2 = \frac{720}{b_1(1+q+q^2+q^3)} = \frac{720}{80} = 9$ (делить можно, т.к. $b_1(1+q+q^2+q^3) \neq 0$. , тогда $\left[\begin{array}{l} q=3 \\ q=-3 \end{array}\right.$

$q=3$: $b_1(1+3+3^2+3^3) = 80$ ~~$b_1 = 2$~~, т.е. $b_1 = 2$, тогда пятый член: $b_1q^4 = 81 \cdot 2 = 162$

$q=-3$ $b_1(1-3+9-27) = 80$

$b_1 = \frac{80}{-20} = -4$, тогда пятый член равен: $b_1q^4 = 81 \cdot (-4) = -324$

Ответ: либо 162, либо −324.

2). $\sin \pi x = \sin x^\circ$

$x^\circ = \frac{2\pi x}{360} = \frac{\pi x}{180}$, т.е.

$\sin \pi x = \sin \frac{\pi x}{180^\circ}$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi x}{180} + 2\pi k \\ \pi x = \pi - \frac{\pi x}{180} + 2\pi n \end{array}\right. (*) \qquad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x \cdot \frac{179}{180} = 2\pi k \\ \frac{181}{180}\pi x = \pi(2n+1) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{360}{179}k \\ x_2 = \frac{360n+180}{181} \end{array}\right.$$

Рассмотрим 3 возможных случая:

1) разность м/у двумя ~~первыми~~ корнями

$|x_1(i) - x_1(i-1)| = \frac{360}{179}$ (т.к k, n целые, то ~~они~~ сосед. отличают корни отличаются ~~не~~ ~~[illegible]~~ на коэф. при k или n)

2) разность м/у двумя корнями из второй группы

$|x_2(i) - x_2(i-1)| = \frac{360}{181}$

3) разность м/у корнями из разных групп.

~~При $n=k$ корни~~ ~~[illegible]~~ ~~πx~~ и x° находятся ~~на од~~ в одном промежутке ~~длиной~~ не

$$\left|\frac{360}{179}k - \frac{360n+180}{181}\right| = \left|\frac{360(181k - 179n) - 180 \cdot 179}{179 \cdot 181}\right| =$$

$= \frac{180}{179 \cdot 181}\left|(362k - 358n - 179)\right|$, т.к. $\frac{180}{179 \cdot 181} = const$, то расст. м/у корнями будет миним., когда $|362k - 358n - 179|$ — будет мин. т.к. $k, n \in \mathbb{Z}$, а 362 и 358 четн, то модульного выражения будет нечётн, т.е значение подмодульного не менее 1. Заметим, что при $n = k = 45$ достигается

10) $(1+2\cos 20^\circ)$

искомое значение т.к. $362 \cdot 45 - 358 \cdot 45 - 179 =$

$= (362-358) \cdot 45 - 179 = 1.$ т.е. минимальное расстояние м/у корнями в данном случае

$$1 \cdot \frac{180}{179 \cdot 181} = \frac{180}{181} \cdot \frac{1}{179} < \frac{1}{179}$$

Сравним имеющиеся варианты: т.к. два ~~предыду~~ первые варианта были больше 1, то искомым ответом будет: $\frac{180}{179 \cdot 181}$

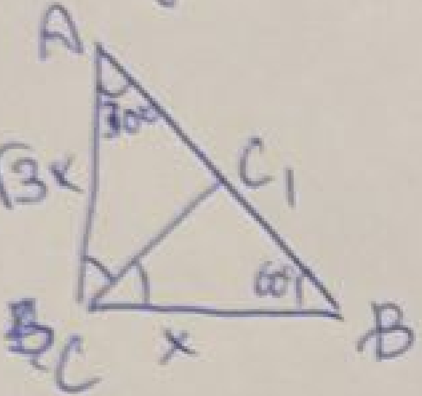
Ответ: $\frac{180}{179 \cdot 181}$.

3. Пусть наим. угол α (из двух первых), тогда второй угол 2α, а третий либо 3α, либо 6α.

1) если 3 угол $- 3\alpha$:

$$\alpha+2\alpha+3\alpha=180^\circ \quad \alpha=30^\circ \quad 3\alpha=90^\circ$$

Пусть наим. сторона Δ-ка x (она будет лежать против меньшего угла)



т.е $BC=x$, тогда $AC=\sqrt{3}x$

$BA=2x=x\sqrt{3}+2\sqrt{2}$, тогда

$x(2-\sqrt{3})=2\sqrt{2}$, тогда $x=\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$.

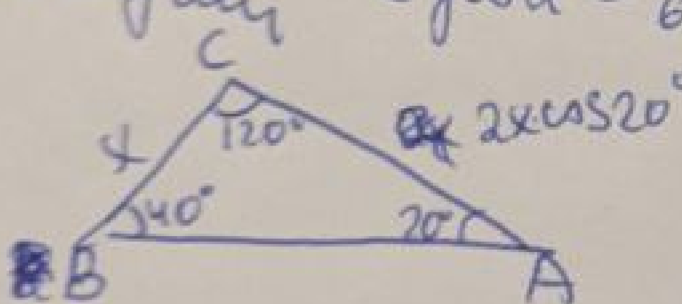
По формуле бис.:

$$CC_1=2\frac{AC\cdot CB}{AC+BC}\cdot\cos\frac{90^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}x^2}{(1+\sqrt{3})x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2(1+\sqrt{3})}x, \text{ т.е.}$$

$$\cancel{CC_1=\frac{2\sqrt{6}}{2(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}}$$

$$CC_1=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}\cdot 2}{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

2 случай 3 угол $- 6\alpha$: $\alpha+2\alpha+6\alpha=180^\circ \quad \alpha=20^\circ$



$6\alpha=120^\circ$, $\angle=20$, $2\alpha=40$

Пусть наим. сторона x. По теор. синус.

$$2R=\frac{x}{\sin 20}=\frac{AC}{\sin 40^\circ}=\frac{AB}{\sin 120^\circ}=\frac{2AB}{\sqrt{3}}$$

$$x\cdot\sin 40=AC\cdot\sin 20^\circ \Rightarrow AC=2x\cdot\cos 20^\circ$$

$$\sqrt{3}x=2AB\cdot\sin 20^\circ$$

$$AB=\frac{\sqrt{3}x}{2\sin 20^\circ}$$

$$2\sin 20^\circ(2x\cos 20^\circ+2\sqrt{2})=\sqrt{3}x$$

$$2x\sin 40^\circ=\sqrt{3}x-4\sqrt{2}\sin 20^\circ \Rightarrow x=\frac{4\sqrt{2}\sin 20^\circ}{(\sqrt{3}-2\sin 40)}$$

$$CC_1=2\frac{BC\cdot AC}{BC+AC}\cdot\cos 60^\circ=2x\cdot\frac{2\cos 20^\circ}{1+2\cos 20^\circ}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$CC_1 = 2 \cdot \frac{4\sqrt{2}\sin 120}{\left(\sqrt{3} - 2\sin 40\right)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\cos 20^\circ}{1+2\cos 20^\circ} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sin 40^\circ}{\left(\sqrt{3} - 2\sin 40\right)\left(1+2\cos 20^\circ\right)} = \frac{4\sqrt{6}\sin 40^\circ}{\left(\sqrt{3} - 2\sin 40\right)\left(1+2\cos 20^\circ\right)}$$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} CC_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \\[2em] CC_1 = \dfrac{4\sqrt{6}\sin 40^\circ}{\left(\sqrt{3} - 2\sin 40\right)\left(1+2\cos 20^\circ\right)} \end{array}\right.$$

4). $a \in [-5; 6]$

$3x^3 - (3a-13)x^2 - (2a-9)x + a - 1 = 0.$

$(x+1)(3x^2 - (3a-10)x + a - 1) = 0$. т.е $x=-1$ – первый целый корень.

$3x^2 - (3a-10)x + a - 1$ (*) решим ур-ние отдельно.

$D = 9a^2 - 60a + 100 - 12(a-1) = 9a^2 - \cancel{60}\,72a + 112 =$

$= (3a-12)^2 - 32$

$x = \dfrac{(3a-10) \pm \sqrt{D}}{6}$, т.е Заметим, что т.к. $\dfrac{3a-10}{6}$ – рац. число при целых a,

и ~~корень~~ как минимум один из корней (*) должен быть целым, то

тогда $6k = (3a-10) \pm \sqrt{D}$ т.к. один из корней должен быть целым, а также $(3a-10)$ – целое т.е

$6k - 3a + 10$ – целое, значит $\sqrt{D}$ – целое число (т.е D – полн. квадрат)

$a = -5$ $(27)^2 > (-27)^2 - 32 > (26)^2$ неуд. т.к $\sqrt{D}$ – не целое.

$a = -4$. $(24)^2 > (24)^2 - 32 > (23)^2$ неуд.

$a = -3$ $(21)^2 > (21)^2 - 32 > (20)^2$ неуд.

$a = -2$ $(18)^2 > (18)^2 - 32 > (17)^2$ неуд.

$a = -1$ $13^2 < (15)^2 - 32 = 225 - 32 = 193 < 14^2$ неуд.

$a = 0$. $10^2 < 144 - 32 < 11^2$ неуд.

$a = 1$ $81 - 32 = 49$ $\sqrt{D} = 7$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{7}{3} \end{array}\right.$ уд.

$a = 2$ $36 - 32 = 4 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$ неуд т.к $x=-1$ уже есть

$a = 3$ $9 - 32 < 0$ т.е $D < 0$ неуд

$a = 4$ $-32 < 0$ т.е $D < 0$ неуд.

$a = 5$ $3^2 - 32 < 0$ неуд

$a = 6$. $6^2 - 32 = 4$ $\sqrt{D} = 2$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{array}\right.$ уд.

Т.е 2 корня у нас в 2 случаях из 12,
а значит вероятность выбрать нужные а:

$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задание 5.

Заметим, что первые 2 буквы и последние 2 буквы определены: ~~т.к.~~ т.к. первая и послед. О, то вторая и предпоследняя – Г.

Рассмотрим последовательность ~~8~~ 6 групп из ОГГ и оставшуюся букву О.

Заметим, что мы из каждой ~~пары~~ группы можем убрать не более 1 буквы Г и вставить в другие группы не более 1 буквы О. Тогда возможны след. случаи:

1) убрали из какой-то ~~пары~~ группы Г и в любую другую добавили О м/у Г и Г, способов: $\frac{5\cdot 6}{2!}$ (т.к. 6 групп и в 5 можно положить ~~остав.~~ „О")

2) убрали из двух групп „Г" и в остав. положили ~~двух~~ две „О", способов: $\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = 90$

3) убрали из 3 групп и положили в 3 оставшиеся.

$\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = 20$

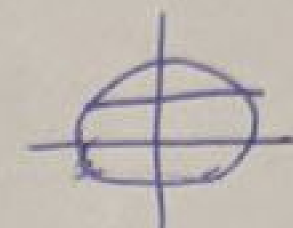
Всего вариантов: $1 + 20 + 90 + 15 =$ ~~125~~ 126 (+ исходная последов. из условия)

Ответ: ~~125~~. 126.

Черновик

2) $\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)$ $\qquad k, n \in \mathbb{Z}$.

$\sin\alpha = \sin\beta$.



$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k, n \end{array}\right.$$

$$x^\circ = \frac{2\pi x}{360} \cdot \cancel{2} = \frac{\pi x}{180}$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi x}{180} + 2\pi k \\ \pi x = -\frac{\pi x}{180} + \cancel{2}\pi(2k+1) \end{array}\right.$$

$$\frac{179}{180}\pi x = 2\pi k. \qquad 179x = 360k.$$

$$\cancel{x \vdots 360}$$

$$x = \frac{360k}{179}.$$

$$\frac{181}{180}\pi x = (2k+1)\pi \qquad x = \frac{180(2n+1)}{181}$$

k целое.

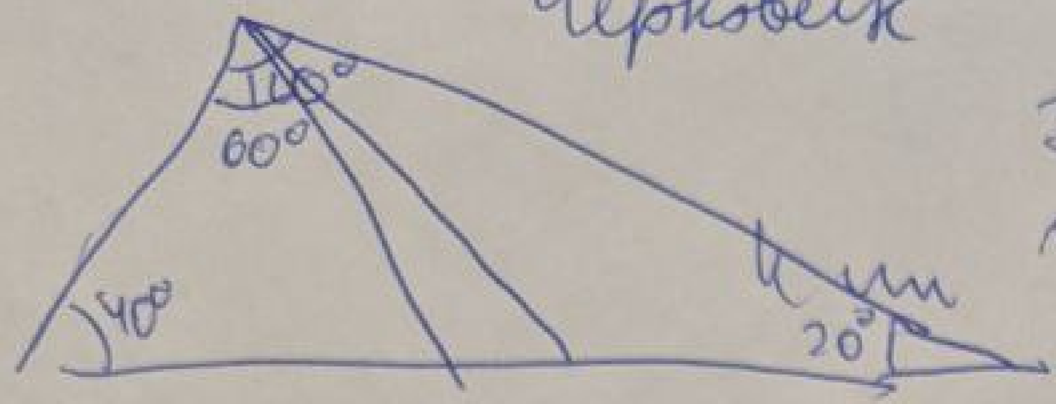
если корни из одной группы, то м/у ними расстояние либо:

$$\frac{360}{179} \quad \text{либо} \quad \frac{180 \cdot 2}{181} = \frac{360}{181}$$

если из разных групп:

$$\left|\frac{180(2n+1)}{181} - \frac{360k}{179}\right| = \left|\frac{-2 \cdot 360k + 180.}{181 \cdot 179}\right|$$

Черновик



30 +

ig

ОГГ ОГГ ОГГ ОГГ ОГГ ОГГО

1) $6 \cdot 5$ $\quad \frac{6\cdot 5}{2!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} + \frac{6\cdot5\cdot4}{6} = 20$

$30 + 20 + 90.$

$4 \cdot 6.$ $\quad \frac{x}{\sin 20} = \frac{2AB}{\sqrt{3}}$

$2x \cdot \cos 20^\circ + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20$

$x \sin 40 + 4\sqrt{2} \sin 20 = \sqrt{3}x$

$$x = \frac{4\sqrt{2}\sin 20^\circ}{2\sin(\sqrt{3} - 2\sin 40)}$$

Черновик

1) $b_1\ ;\ b_1q\ ;\ b_1q^2\ ;\ b_1q^3\ ;\ b_1q^4\ ;\ b_1q^5$ -

$$\frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4}=20$$

$$q^2=9.$$

$$\frac{b_1q^2(1+q+q^2+q^3)}{4}=180.$$

$$q=\pm 3.$$

$q=3:\ 1+q+q^2+q^3 = 4+9+27 = 40.$

$b_1\cdot 10=2.$ $\quad b_1\cdot q^4 = 81\cdot 2 = 162.$

$q=-3:\ 1+q+q^2+q^3 = 1-3+9-27 = -20.$

$b_1=-4$

$b_1q^4 = 81\cdot(-4) = -324$

4. $\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}x = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}}{\ }$

Черновик

$3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1=0$

$\cancel{(x-1)(3x^2-3a-16)x}$

$(x+1)(3x^2-(3a-10)x+a-1)=0.$

$D=\cancel{(3a-10)^2}-4a+4 \quad =9a^2-60a$

$+\cancel{100-64a+4}=9a^2-64a+104$

$D=9a^2-60a+100-12a+12=0$

$=9a^2-72a+112.$

$(x-1)(3x^2 \quad -3-\cancel{3a}+13+\cancel{2a}-9+\cancel{a}-1=0$

$3x^3-3x^2+3a-16 \qquad a_0=\frac{72}{18}=4.$

$-3a-0 \quad D(4)=9\cdot16-72\cdot4+112$

$=72\cdot2+112.$

$3-\{3a+13\}-2a+9+a-1=0$

$D(4)<0.$