



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Богданов Яков Владимирович**

Технический балл: **95**

Дата: **17 мая 2020 года**

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_n\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$.
Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,57) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

уравн 1

лем: $b_2 = b_1 + k$

состав $\{b_i\}$ - возрастающая арифм. прогрессия, то $b_i = b_1 + k(i-1)$ и $k > 0$.

$$= b_1 + k(b_2 - 1) = 1 + k(b_1 + k(2-1) - 1) = 1 + k^2$$

$$= 10 \Rightarrow 1 + k^2 = 10 \Rightarrow k = \pm 3 \Rightarrow k = 3 \quad (\text{т.к. } k > 0)$$

таким, $b_i = b_1 + k(i-1) = 1 + 3(i-1)$

$$= 1 + 3(b_3 - 1) = 1 + 3 \cdot 3(b_3 - 1) = 1 + 9 \cdot 3(3 - 1) = 55$$

ответ: 55

Задача 2.

Пусть: $16 = BH$ в $\triangle ABC$

Пусть: $\triangle ABC$ — $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $16 = BH$, где BH — высота на AB в $\triangle ABC$,
 Пусть: $z = \frac{BC}{AB}$, $k = \frac{AC}{AB}$ ($BC = 4z$, $AC = kz$)

$\triangle BHC \sim \triangle BCA$, т.к. $\angle ABC$ — общ., $\angle BHC = 90^\circ = \angle ACB$

$BH/BC = BC/BA$, т.к. $\triangle CBH \sim \triangle ABC$

$$BH = \frac{BC^2}{BA}$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad (\text{теорема Пифагора})$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{k^2 z^2 + 4^2 z^2} = z \sqrt{4^2 + k^2} \quad (\text{пункт 3})$$

$$16 = \frac{(4z)^2}{z \sqrt{4^2 + k^2}} \quad (\text{пункт 2})$$

$$16 z \sqrt{4^2 + k^2} = 16 z^2$$

$$\sqrt{4^2 + k^2} = z$$

Почти касания впис. окр.: D, E, F ; сторон $\triangle ABC$: CB, AC, BA , разбивая стор. $\triangle ABC$ на три пары равных отрезков: $AE = AF, BF = BD, CD = CE$.

$PCFI$ — квадрат, т.к. $\angle DCE = \angle DCF = \angle CEI = 90^\circ$ и $EI = DI$.

$$AC + CB = AB + 2CD \quad (\text{пункт 6})$$

$$AC + CB = AB + 2DI \quad (\text{пункт 7})$$

$$kz + 4z = z \sqrt{4^2 + k^2} + 2 \cdot 5$$

$$(4 + k) \sqrt{4^2 + k^2} = 4^2 + k^2 + 10$$

$$(4 + k)^2 (4^2 + k^2) = 100 + 20(4^2 + k^2) + (4^2 + k^2)^2$$

$$8k(4^2 + k^2) - 20(4^2 + k^2) - 100 = 0$$

$$4(2k^3 - 5k^2 + 32k - 105) = 0$$

$$(k - 3)(2k^2 + k + 35) = 0$$

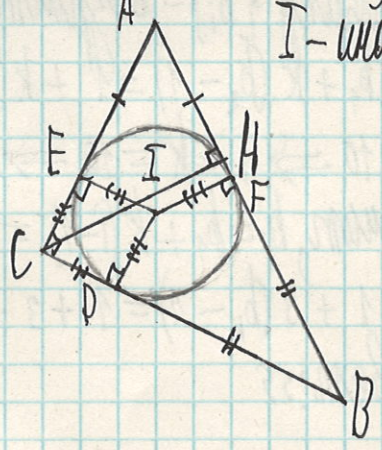
$$k - 3 = 0 \quad \text{т.к. } 2k^2 + k + 35 = 2(k + \frac{1}{4})^2 + 34\frac{7}{8} > 0$$

$$k = 3$$

$\triangle AHC \sim \triangle ACB$, т.к. $\angle BAC$ — общ., $\angle AHC = \angle BCA$

$$AH/AC = AC/AB \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{(kz)^2}{z} = k^2 = 9$$

Ответ: 9.



Задача 3.

$$\sin(x^2 - 2,5x) = \cos(\pi x)$$

При $x \in [0; 0,5]$ $\sin(x^2 - 2,5x) < 0 \neq \cos(\pi x)$. Значит в $[0; 0,5]$ корней нет. Если в $[0,5; 1]$ $\sin(x^2 - 2,5x) \in [-1; 0]$ и $\cos(\pi x) \in [-1; 0]$, то при подстановке x в выражение πx получается число из $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ и $\cos \pi x \in [-1; 0]$, а $x^2 - 2,5x \in [-\pi; 0]$. Возможны два случая:

$$(x^2 - 2,5x) + \frac{3\pi}{4} = \pi x \quad \text{и} \quad (x^2 - 2,5x) + \pi x = \frac{\pi}{2}$$



$$(x^2 - 2,5x) + \frac{3\pi}{4} = \pi x$$

$$x^2 - \pi x - (2,5x - \frac{3\pi}{4}) = 0$$

$$D = \pi^2 + 4(2,5x - \frac{3\pi}{4}) = \pi^2 - 2\pi + 10,28 = \pi^2$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2}}{2} \Rightarrow x \notin [0; \pi] \Rightarrow x \notin [0,5; 1]$$



$$(x^2 - 2,5x) + \pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + \pi x - (2,5x + \frac{\pi}{2})$$

$$D = \pi^2 + 4(2,5x + \frac{\pi}{2}) = 4(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + 0,25) + 8,88 > 4(\frac{\pi}{2} + 0,5)^2$$

$$x = \frac{-\pi \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$\frac{-\pi - \sqrt{D}}{2} < \frac{-\pi - \pi}{2} \leq 0 \Rightarrow x \notin [0,5; 1]$$

$$\frac{-\pi + \sqrt{D}}{2} > \frac{-\pi + (\pi + 1)}{2} = 0,5 \Rightarrow x \in (0,5; \infty)$$

$$\frac{-\pi + \sqrt{D}}{2} = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,28}}{2}$$

$$\frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,28}}{2} \leq 1$$

$$\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,28} \leq 2 + \pi$$

$$\pi^2 + 2\pi + 10,28 \leq \pi^2 + 4\pi + 4$$

$$6,28 \leq 2\pi \Rightarrow x \in (-\infty; 1)$$

Значит в $[0; 1]$ только 1 корень — исконый

Ответ: $\frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,28}}{2}$.

Задача 4.

Пусть: стороны — a, b, c , c — третья стор., $a \leq b$ (не у нас. обшук.).
 $a + b = 2020$ $ab = c$ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = c + 1$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = c + 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + 2c + 1$$

$$a^2 + b^2 - 2c = 1$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 1$$

$$(a - b)^2 = 1$$

$$b = a + 1$$

$$a + b = 2020 \Rightarrow a + (a + 1) = 2020 \Rightarrow 2a = 2019 \Rightarrow a = 1010 - 0,5 \Rightarrow b = 1010 + 0,5$$

$$c = ab \Rightarrow c = 1010^2 - \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = c + 1 = 1010^2 - \frac{1}{4} + 1 = 1020100,75$$

Ответ: 1020100,75.

Задача 5.

Пусть: $x = 4 + a$

$$x^2 + a|x-a| = 8x - 15$$

$$(x-4)^2 + a|x-a| = 1$$

При $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow +\infty$ выражение $(x-4)^2 + a|x-a| \rightarrow +\infty$. Значит оно имеет корень, если при каком-либо x меньше 1 (следствие из непрерывности). Найдём наименьшее значение $(x-4)^2 + a|x-a|$.

При $x-a > 0$:

$$((x-4)^2 + a(x-a))' = 2(x-4) + a$$

$$2(x-4) + a = 0$$

$$x = 4 - 0,5a$$

$$(4 - 0,5a) - a > 0 \Rightarrow a \leq \frac{8}{3}$$

При $x-a < 0$:

$$((x-4)^2 - a(x-a))' = 2(x-4) - a$$

$$2(x-4) - a = 0$$

$$x = 4 + 0,5a$$

$$(4 + 0,5a) - a < 0 \Rightarrow a > 8$$

Если $a \in [\frac{8}{3}; 8]$, то наименьшее значение достигается при $x-a=0$. При увеличении x от $-\infty$ до $+\infty$ функ. возрастает при $x > a$, падает при $x < a$.

Если $a \notin [\frac{8}{3}; 8]$, то при $x-a=0$ наим. значение не дост., так как на момент $x-a=0$ дифференциал не меняет знак.

$$(4 - 0,5a - 4)^2 + a(4 - 0,5a - a) = \frac{a^2}{4} - 1,5a + 4a = a(4 - \frac{5a}{4})$$

$$a(4 - \frac{5a}{4}) \leq 1$$

$$0 \leq \frac{5a^2}{4} - 4a + 1$$

$$0 \leq 5a^2 - 16a + 4$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 176 \quad \frac{16 \pm \sqrt{176}}{2 \cdot 5} = 1,6 \pm \sqrt{1,76}$$

$$a \in (-\infty; \frac{8}{3}) \cap (-\infty; 1,6 - \sqrt{1,76}] \cup [1,6 + \sqrt{1,76}; +\infty)$$

$$a \in (-\infty; 1,6 - \sqrt{1,76}]$$

$$(4 + 0,5a - 4)^2 - a(4 + 0,5a - a) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - 4a = \frac{3a^2}{4} - 4a$$

$$\frac{3a^2}{4} - 4a \leq 1$$

$$0 \leq 3a$$

$$3a^2 - 16a - 4 \leq 0$$

$$D = 16^2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 304 \quad \frac{16 \pm \sqrt{304}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{76}}{3}$$

$$a \in (8; \infty) \cap \left[\frac{8 - \sqrt{76}}{3}; \frac{8 + \sqrt{76}}{3} \right]$$

$$\text{Нет } a \left(8 > \frac{8 + \sqrt{76}}{3} \right)$$

$$(a - 4)^2 - a(a - a) = (a - 4)^2$$

$$(a - 4)^2 \leq 1$$

$$a \in [3; 5] \cap \left[\frac{8}{3}; 8 \right]$$

$$a \in [3; 5]$$

Ответ: $a \in (-\infty; 1,6 - \sqrt{1,76}] \cup [3; 5]$, при $a = 3; 5$ или $1,6 - \sqrt{1,76}$ одно решение, при остальных a — два реш..