МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Беляев Артём Русланович**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)\,?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5;\,6]$ и после этого решает уравнение $3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1=0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Г*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Г*. Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

1. $b_1(1+q+q^2+q^3) = 4 \cdot 20$; b_i - i-ый член, $\{b_n\}$ - геом. прогрессия

$b_1(q^2+q^3+q^4+q^5) = 4 \cdot 180$

$b_1 q^2 \cdot (1+q+q^2+q^3) = 4 \cdot 180$

$\Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow$

$q = \pm 3$

1) $q = 3$ $\quad b_1 \cdot (3+1+9+27) = 4 \cdot 20$

$b_1 \cdot 40 = 4 \cdot 20$

$\Rightarrow b_1 = 2$

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 81 = 162$

2) $q = -3$ $\quad$ ~~Т.к. сказано $b_1 > 0$~~

$b_1(1-3+9-27) = 4 \cdot 20$

$b_1 \cdot (-20) = 4 \cdot 20$

$b_1 = -4$

$b_5 = -4 \cdot (-3)^4 = -81 \cdot 5 = -324$

---

2. $\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)$ $\quad x^\circ = \frac{x \cdot \pi}{180}$

$\begin{cases} \pi x = x^\circ + 2\pi k, k \in \mathbb{N} \\ \pi x = 180^\circ - x^\circ + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\begin{cases} \pi x = \frac{x\pi}{180} + 2\pi k, k \in \mathbb{N} \\ \pi x = \pi - \frac{x\pi}{180} + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{x}{180} + 2k \\ x = 1 - \frac{x}{180} + 2n \end{cases}$

1) $q=3$ $\quad b_1 \cdot (3+1+9+27) = 4 \cdot 10$

$b_1 \cdot 40 = 4 \cdot 10$

$\Rightarrow b_1 = 2$

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 81 = 162$

2) $q=-3$ $\quad$ ~~по аналогии~~ $b_1 > 0$

$b_1 (1-3+9-27) = 4 \cdot 20$

$b_1 \cdot (-20) = 4 \cdot 20$

$b_1 = -4$

$b_5 = -4 \cdot (-3)^4 = -81 \cdot 4 = -324$

---

7. $\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)$ $\qquad x^\circ = \frac{x \cdot \pi}{180}$

$$\begin{cases} \pi x = x^\circ + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = 180^\circ - x^\circ + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x = \frac{x\pi}{180} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \pi - \frac{x\pi}{180} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{x}{180} + 2k \\ x = 1 - \frac{x}{180} + 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 179x = 360k \quad (1) \\ 181x = 180 + 360n \quad (2) \end{cases}$$

Найдём хорошие из 1-ой серии: $\left| \frac{360k}{179} \right|$; из 2-ой: $\left| \frac{360n}{181} \right|$

$k=1$ $\left(\frac{360}{179}\right)$ (1) ; $n=1$ $\left(\frac{360}{181}\right)$ (2)

Найдём Δ (1) и (2) серий: $\left| \frac{360k}{179} - \frac{180}{181} - \frac{360n}{181} \right| =$

$$= \left| \frac{360k}{179} - \frac{180}{181}(2n+1) \right| =$$

1) $$= \frac{180}{179 \cdot 181} \left| 2 \cdot 181k - (2n+1)179 \right| =$$

$$= \frac{180}{179 \cdot 181} \left| 2 \cdot 181k - 2 \cdot 179n - 179 \right| =$$

2) $$= \frac{180}{179 \cdot 181} \left| \underbrace{2(181k - 179n)}_{\text{чет.}} - \underbrace{179}_{\text{нечет.}} \right|$$ ~~$\neq 0$, т.к. сум~~ ~~$\neq 0$, т.к. сумма~~

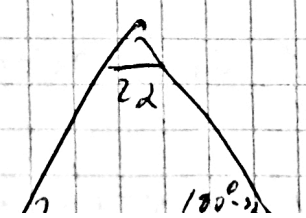
$\Rightarrow \neq 0$, $\Rightarrow$ min будет !

k при $k = n = 45$ будет !

$\Rightarrow$ min $\frac{180}{179 \cdot 181} < \frac{360}{181} < \frac{360}{179}$

Ответ: $\frac{180}{179 \cdot 181}$

№3.



1) $2\alpha \cdot 3 = 180° - 3\alpha$ 2) $\alpha \cdot 3 = 180$

$9\alpha = 180°$ $\alpha = 30°$

1) $= \frac{180}{179 \cdot 181} \left| 2 \cdot 181k - (2n+1) 179 \right| =$

$= \frac{180}{179 \cdot 181} \left| 2 \cdot 181k - 2 \cdot 179n - 179 \right| =$

2) $= \frac{180}{179 \cdot 181} \left| \underbrace{2(181k - 179n)}_{\text{чет.}} - \underbrace{179}_{\text{нечет.}} \right|$ ~~0, т.к. сама 0, но корень один~~

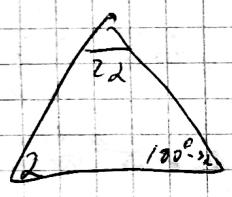
$\Rightarrow \neq 0$, $\Rightarrow$ min будет 1

~~k~~ при $k = n = 45$ будет 1

$\Rightarrow$ min $\frac{180}{179 \cdot 181} < \frac{360}{181} < \frac{360}{179}$

Ответ: $\frac{180}{179 \cdot 181}$

№3.

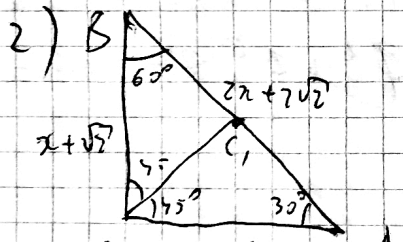


1) $2\alpha \cdot 3 = 180° - 3\alpha$ 2) $\alpha \cdot 3 = 180° - 3\alpha$

$9\alpha = 180°$ $\alpha = 30°$

$\alpha = 20°$

2)



$BC = \frac{AB}{2} = x + \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ $\angle B$ 90° $\Rightarrow$ AB - гип., 60° > 30° $\Rightarrow$

$AC = 2x$

$(2x)^2 + (x+\sqrt{2})^2 = (2x+7\sqrt{2})^2$

$4x^2 + x^2 + x2\sqrt{2} + 2 = 4x^2 + 8x\sqrt{2} + 8$

$x^2 - 6\sqrt{2}x - 6 = 0$

$D = 36 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = (4\sqrt{6})^2$

$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}{2} \\ x = \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{2} < 0 \text{ не уд.} \end{cases}$

проверим, что $AC > BC$

$$2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) > 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} + \sqrt{6} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

верно

~~4)~~ Тогда $l_c = \sqrt{2} \cdot \frac{AC \cdot BC}{AC + BC}$

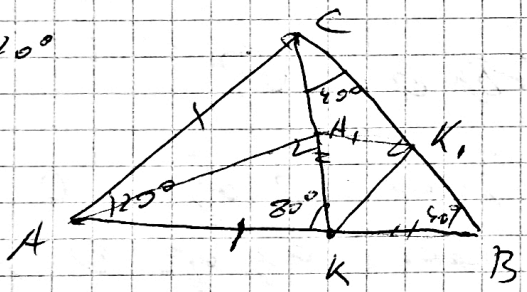
$$l_c = \sqrt{2} \cdot \frac{2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \cdot 2 \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{6})}{6\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} =$$

$$= 4\sqrt{2} \frac{(12 + 12 + 6\sqrt{3} + 8\sqrt{3})}{2(5\sqrt{2} + 3\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 (12 + 7\sqrt{3})}{\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 (12 + 7\sqrt{3})}{(5 + 3\sqrt{3})} = 2 \cdot \frac{2 (5 - 3\sqrt{3})(12 + 7\sqrt{3})}{-2} =$$

$$= -2(60 - 36\sqrt{3} + 35\sqrt{3} - 63) = 2(3 + \sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3}$$

1) $\angle = 10°$



Отметим т. K так, чтобы $AC = AK$, тогда $CK = KB$

т. к. $\angle KCB = 120° - 80° = 40°$

$AC > BC$; $AB = AC + 2\sqrt{2}$

$AC = x$, $AB = x + 2\sqrt{2}$) $AB = AK + KB = AC + KB$

$\Rightarrow KB = 2\sqrt{2} = KC$

$AA_1 \perp CK$ и $KK_1 \perp BC \Rightarrow$

$A_1K = \frac{1}{2} KC = \sqrt{2}$

$\triangle AA_1K$: $\cos \angle K = \frac{A_1K}{AK} = \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\cos 80°}$

$\triangle BK_1K$: $\cos \angle B = \frac{BK_1}{BK} = \frac{\frac{1}{2}BC}{2\sqrt{2}} \Rightarrow BC = 4\sqrt{2} \cdot \cos 40°$

проверим, что $AC > BC$; $\frac{\sqrt{2}}{\cos 80°} > 4\sqrt{2} \cos 40°$

$1 > 4 \cos 40° \cdot \cos 80°$

$$1 > 2\left(\cos 40^\circ + \underbrace{\cos 100^\circ}_{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$2 > 2\cos 40^\circ$$

$$1 > \cos 40^\circ \quad \text{верно}$$

1) Из ф-лы биссектрисы: $l_c = \dfrac{AC \cdot BC \cdot \cos 2\frac{C}{2}}{AC + BC}$

$$l_c = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 40^\circ - \cos 60^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ} + 4\sqrt{2}\cos 40^\circ} =$$

2)

$$= \frac{8\cos 40^\circ}{\sqrt{2}(1 + 4\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ)} = \frac{8\cos 40^\circ}{\sqrt{2}(1 + 2(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ))} =$$

$$= \frac{8\cos 40^\circ}{2\sqrt{2}\cos 40^\circ} = 2\sqrt{2}$$

Ответ: либо $2\sqrt{2}$, либо $6 + 2\sqrt{3}$

5. Ребро и вершина O, т.к. 2 вершины O не могут идти подряд, но вершина O разбивает число на $n-1$ промежуток, в каждый промежуток 1 или две вершины Γ $\Rightarrow$ всего вершин Γ от $n-1$ (когда везде 1 вершина Γ) до $2(n-1)$ (когда

4. $3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1=0$

$3x^3+13x^2+9x-1=a(3x^2+7x-1)$

$(3x^2+10x+1)(x+1)=a(3x-1)(x+1)$

$x=-1$ — при $\forall a \Rightarrow \forall a \in [-5;6]$

$(3x-1)\ a=3x^2+10x-1$

$3x^2+(10-3a)x+a-1=0$ — кол-во

D - ур-я должен быть ≥ 0, т.к. нужно, чтобы числа

$D=(10-3a)^2-3\cdot4(a-1)=$

$=9a^2-72a+112=(3a-12)^2-32$

$(3a-12)^2-32=b^2$, $b\in\mathbb{N}$, т.к. $b^2=|b|^2$

$(3a-12-b)(3a-12+b)=32$

2-ая скобка $>1 \Rightarrow$ возможны случаи:

1) $\begin{cases}3a-12-b=1\\3a-12+b=32\end{cases}$ $\Rightarrow b\in\mathbb{N}$

$6a-24=33$

$a=\frac{57}{6}$ не уд.

2) $\begin{cases}3a-12-b=2\\3a-12+b=16\end{cases}$ $\Rightarrow 6a=18+24$

$\begin{cases}a=7\\b=7\end{cases}$ уд. не уд. т.к. $a\notin[-5;6]$

3) $\begin{cases}3a-12-b=4\\3a-12+b=8\end{cases}$ $\begin{cases}6a=36\\b=2\end{cases}$ $\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$ уд.

4) $\begin{cases}3a-12-b=32\\3a-12+b=-1\end{cases}$ $b\notin\mathbb{N}$ не уд.

5) $\begin{cases}3a-12-b=-16\\3a-12-b=-2\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\b=7\end{cases}$ уд.

б) $\begin{cases} 3a-12-b=-8 \\ 3a-12+b=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$ уд.

Получили возможные значения $a \in \{6; 1; 2\}$

1) $a=6$ $3x^2-8x+5=0$

$\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow$ есть 2 целых корня $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

т.е. $a=6$ уд.

2) $a=1$ $3x^2+7x=0$

$\begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{7}{3} \end{cases}$ уд. т.к. $\begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=2$ $3x^2+4x+1=0$

$\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$ не уд. ~~$x=-1$~~

т.к. 2 корня совпадают

Получили значения $a \in \{1; 6\}$ $a \in [-5; 6]$ - 12 целых чисел

$\Rightarrow$ вероятность $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

5. Всего n букв О, т.к. 2-буквы О не могут идти подряд, но буквы О сдвигают влево на $n-1$ промежуток, в каждый предыдущий 1 или две буквы Г $\Rightarrow$ всего букв Г от $n-1$ (когда везде, буква Г) до $2(n-1)$ (когда везде 2 буквы Г). Таким не сами буквы О-n, но Г $19-n$

1) буквы Г $n-1$, тогда $n-1 = 19-n \Rightarrow n=10$
и расстояние одинаковое т.к. везде 1 буква Г

2) буквы Г n, тогда $n = 19-n$
$\frac{2n}{2} = 19 \div 2 \Rightarrow n \in \emptyset$

3) $n+1$
$n+1 = 19-n$
$2n = 9$

всего 8 промежутков

везде должно быть хотя бы 1 буква Г, кроме расставить их, когда ост. $(19-9-8)=2$ буквы Г их можно расставить C_8^2 способов для ~~все буквенных~~ ~~все буквы Г~~

4) $n+2$ $n+2=19-n$ не уд.

~~5) $n+2$ $n=8$~~

в общем случае получим, что кол-во способов для каждого n будет: $C_{n-1}^{19-n-2(n-1)} = C_{n-1}^{19-n-2n+2} = C_{n-1}^{21-2n}$;

т.к. всего промежутков $n-1$, то в каждый хотя бы одна буква Г, т.е. выбранно можно поставить $(19-n-(n-1)) = 20-2n$, т.к. всего букв Г, но из них $n-1$ должны стоять в промежутках.

теперь найдем все возм. n

5) $n+3$; $n+3=19-n \Rightarrow n=8$

6) ~~$n+4$; $n+4$~~

$n+2k$ не уд, т.к. $n+2k=19-n$

$2n = \underline{19-2k}$

нечет.

$\Rightarrow 6 \mid n+5$; $n+5=19-n \Rightarrow n=7$

7) $n+7$; $n+7=19-n \Rightarrow n=6$, но

~~$n+7=8$ не подходит~~

когда всего букв Г 13, а букв О 6 промежутков $6-1=5$, когда хотя бы в одной будет

3 обувки Г, $\cdot 13 > 10$

т.е. $n \in \{10; 9; 8; 7\}$

~~во всех~~ случаи не подх., т.к. обувь Г разных пол-в

Всего способов: $C_9^{20-2\cdot10} + C_8^{20-2\cdot9} + C_7^{20-2\cdot8} + C_6^{20-2\cdot7} + 1 = 1 + \frac{8\cdot7}{2} + \frac{7\cdot6\cdot5}{3!} + 1 = 2 + 28 + 35 = 65$

Ответ: 65

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников
„Ломоносов горд!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученика 11 класса МАОУ ФМЛ № 93
г. Уфа республики Башкортостан
Беляева Артёма Руслановича

Прошу восстановить мои незачтенные баллы, так как их нет в результатах олимпиады по математике

дата 30.05.20