МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Никитина Мария Александровна**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1.

Дано:

(b_n) - арифм. прогр.

$n = 6$

$\frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4} = 15$

$\frac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4} = 60$

$b_6 - ?$

Решение:

1.) $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$; $\frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4} = 15$

$S_4 = b_1+\ldots+b_4 = 4\cdot 15 = 60$; $S_4 = \frac{b_1(q^3-1)}{q-1}$

$b_3+\ldots+b_6 = 240$

$b_n = b_1\cdot q^{n-1}$; $b_2 = qb_1$; $b_3 = q^2 b_1$; $b_4 = q^3 b_1$;

$b_5 = q^4 b_1$; $b_6 = q^5 b_1$

$\frac{b_3+\ldots+b_6}{b_1+\ldots+b_4} = \frac{240}{60} = 4$

$\frac{b_1\cdot(q^2+q^3+q^4+q^5)}{b_1(1+q+q^2+q^3)} = 4$

$\frac{q^2(1+q+q^2+q^3)}{1+q+q^2+q^3} = 4$

Т.к. $q \neq 0$, то $q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

2.) $q = 2$

$\frac{b_1\cdot(2^3-1)}{2-1} = S_4 = 60$

$b_1\cdot 15 = 60$

$b_1 = 4$

$b_6 = b_1\cdot q^5 = 128$

$q = -2$

$\frac{b_1\cdot(2^3-1)}{-2-1} = 60$

$5b_1 = -60$

$b_1 = -12$

$b_6 = q^5 b_1$; $b_6 = -12\cdot(-2)^5$

$b_6 = 384$

Ответ: $b_6 = 128$ или $b_6 = 384$

№2.

$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$; ОДЗ: $x \in R$

$x^\circ = \frac{\pi x}{180}$, т.к. $\pi \Leftrightarrow 180^\circ \Rightarrow 3x^\circ = \frac{3\pi x}{180} = \frac{\pi x}{60}$,

$\sin(\pi x) - \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right) = 0$,

$2\cdot\sin\left(\pi x - \frac{\pi x}{60}\right)\cdot\cos\left(\pi x + \frac{\pi x}{60}\right) = 0$,

$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{59\pi x}{60}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{61\pi x}{60}\right) = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{59\pi x}{60} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{61\pi x}{60} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\frac{59x}{60} = k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{61x}{60} = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}59x = 60k, k \in \mathbb{Z} \\ 61x = 30 + 60n, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{60k}{59}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{30+60n}{61}, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

Пусть ближайшие корни принадлежат первой серии, тогда:

$p = \frac{60(k+1)}{59} - \frac{60k}{59} = \frac{60}{59}$ ($k+1$, потому что иначе p будет больше)

Если второй серии:

$p = \frac{30+60(n+1)}{61} - \frac{30+60n}{61} = \frac{60}{61} < \frac{60}{59}$

Пусть ближайшие корни принадлежат разным сериям:

$p = \left|\frac{60k}{59} - \frac{30+60n}{61}\right|$

$\frac{60k}{59} - \frac{30+60n}{61} = \frac{60\cdot61k - 30\cdot59 - 60\cdot59n}{59\cdot61} = \frac{30\cdot(2\cdot(61k-59n)-59)}{59\cdot61}$

Чтобы p по модулю было ~~минум~~ минимально

$(2\cdot(61k-59n)) \to 59$

тогда $2(61k-59n)=59$ целых решений не имеет,

но при $k=n \Rightarrow 4\cdot k - 59 = 1$ при $k=15$

Это минимально возможное по модулю значение

Тогда $p = \frac{30}{59\cdot61}$

Ответ: $p = \frac{30}{59\cdot61}$

№4.

$3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=0$, ОДЗ: $x\in R$

Пусть $x=-1$, тогда

$3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=-3-3a+4+2a-3+a+2=-3+4-3+2=0$

Значит $x=-1$ всегда будет корнем уравнения

~~Но~~ Тогда

	3	4-3a	3-2a	a+2
-1	3	1-3a	a+2	0

$3x^2+(1-3a)x+a+2=0$; $x=\dfrac{3a-1\pm\sqrt{D}}{6}$

$D=1-6a+9a^2-12a-24=9a^2-18a-23$

$a=-5$: $D=225+90-23=202+90=292$

$\sqrt{D}=2\sqrt{73}$

$x=\dfrac{-15-1\pm2\sqrt{73}}{6}$ – нецелое

$a=-4$: $D=144+72-23=193 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

$a=-3$: $D=81+54-23=81+31=112 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

$a=-2$: $D=36+36-23=49$

$\sqrt{D}=7$

$x=\dfrac{-6-1\pm7}{6}$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \quad ✓ \\ x=-\frac{7}{3} \quad ✗ \end{array}\right.$ но, т.к. ещё $x=-1$ $a=-2$ подходит.

$a=-1$: $D=9+18-23=4$

$\sqrt{D}=2$

$x=\dfrac{-3-1\pm2}{6}$

~~$x=\ 2$~~

$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3} \quad ✗ \\ x=-1 \quad ✗ \end{array}\right.$, т.к. такой корень уже есть

$a=0$: $D=-23<0$

$a=1$: $D=9-18-23<0$

$a=2$: $D=36-36-23<0$

$a=3$: $D=81-54-23=4$; $\sqrt{D}=2$

$x=\dfrac{8\pm2}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{10}{6} \quad ✗ \\ x=1 \quad ✓ \end{array}\right. \Rightarrow$ подходит

$a=4$: $D = 144-72-23 = 72-23 = 49$ №4 (продолжение)

$\sqrt{D} = 7$

$x = \frac{11 \pm 7}{6}$

$\left[\begin{array}{l} x = 3 \checkmark \\ x = \frac{4}{6} \times \end{array}\right.$ => подходит

$a=5$: $D = 225-90-23 = 202-90 = 112 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

$a=6$: $D = 324-108-23 = 301-108 = 101-8 = 93 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

Таким образом, из 12 вариантов a только 3 подходят под условие: $a=4$; $a=3$; $a=-2$

Значит, вероятность: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow 25\%$

Ответ: 25%

№5.

№3 (продолжение)

4. $BM = \frac{2 \cdot x \cdot (\frac{x}{2}+5)}{x+\frac{x}{2}+5} \cdot \cos 45°$

$BM = \frac{x^2+10x}{1{,}5x+5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BM = \frac{2x^2+20x}{3x+10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$BM = \frac{x^2+10x}{3x+10} \cdot \sqrt{2}$

$BM = \frac{(30+20\sqrt{3}) \cdot (40+20\sqrt{3})}{100+60\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$

$BM = \frac{2400+1400\sqrt{3}}{100+60\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$

$BM = \frac{240+140\sqrt{3}}{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$

$\boxed{BM = \frac{120+70\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}}$

5. Пусть $\angle ABC = 3 \cdot \angle BCA = 6\alpha$

Тогда $6\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$

$\alpha = 20°$; $\angle ABC = 120°$; $\angle BAC = 20°$; $\angle ACB = 40°$

6. $\triangle ABC$; По т. синусов:

$\frac{x}{\sin 40°} = \frac{x+10}{\sin 120°}$

$\sin 120° = \sin 40° \cdot (3 - 4 \cdot \sin^2 40°)$

$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, пусть $\sin 40° = c$

$c \cdot (3-4c^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4c^3 - 3c + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$\frac{x}{x+10} = \frac{1}{3-4\sin^2 40°}$

$3x - 4\sin^2 40 \cdot x = x+10$

$x(2 - 4 \cdot \sin^2 40°) = 10$

$x(1 - 2 \cdot \sin^2 40°) = 5$

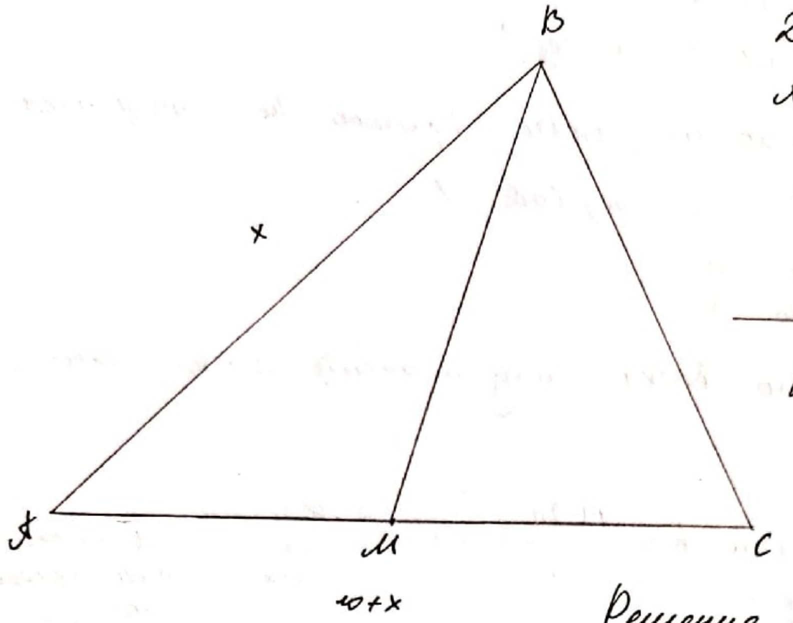
$x \cdot \cos 80° = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{\cos 80°}$

7. По т. ~~со кос~~ косинусов: $\cancel{x^2 + CB^2 =}$ $(x+10)^2 = x^2 + CB^2 - 2 \cdot x \cdot CB \cdot \cos 120°$

$x^2 + 20x + 100 = x^2 + CB^2 + x \cdot CB$

$20x + 100 = CB^2 + x \cdot CB$

№3



Дано: $\triangle ABC$; BM – бис-са

$AC > AB > BC = 10+x$

$AB = x$

$\angle ABC > \angle BCA > \angle BAC$

$\angle BAC = \alpha$

$\angle BCA = 2\alpha$

Найти BM

Решение.

1. $\angle ABC > \angle BCA > \angle BAC$ т.к. $AC > AB > BC$, а напротив большей стороны лежит больший угол.

2. Пусть $\angle ABC = 3 \cdot \angle BAC = 3\alpha$

Тогда $\angle A + \angle C + \angle ABC = 6\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

Значит, $\angle ABC = 90°$; $\angle AC = 60°$

3. $\triangle ABC$ – прямоугольный; $\angle A = 30° \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AC = \frac{x}{2} + 5$

По т. Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$(x+10)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}+5\right)^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + \frac{x^2}{4} + 5x + 25,$$

$$\frac{x^2}{4} - 15x - 75 = 0,$$

$$x^2 - 60x - 300 = 0,$$

$$D = 3600 + 1200$$

$$\sqrt{D} = 40\sqrt{3}$$

~~$x = 15 + 40$~~

$$x = \frac{60 + 40\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 30 + 20\sqrt{3}$$

4. По формуле бис-сы $\triangle ABC$:

$$BM = \frac{2 \cdot AB \cdot BC}{AB + BC} \cdot \cos\left(\frac{\angle ABC}{2}\right);$$

№5.

Первая буква в слове всегда А

Тогда что можно поставить после неё?

БА или ББА и только их, иначе правило не выполняется

У нас всего 19 мест после первой А

Пусть блоков БА всего а

блоков ББА всего в

Замечу, что после каждого блока могу поставить только какой-то из блоков опять

Тогда $2a+3b=19$

$a = \frac{19-3b}{2}$ или $b = \frac{19-2a}{3}$ => ~~а нечётное~~ $(19-2a) \vdots 3$ => а имеет остаток 2 при делении на 3

т.к. $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{N}$, то

решения у этого уравнения: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases} \\ \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=8 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Способов поставить 1 блок ББА на 9 получившихся мест $(a+b=8+1=9)$:

$C_9^1 = 9$ (на оставшиеся 8 мест будут поставлены блоки БА)

3 блока ББА на $3+5=8$ мест: $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6\cdot7\cdot8}{2\cdot3} = 56$

2 блока БА на $2+5=7$ мест: $C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6\cdot7}{2} = 21$

Всего получилось вариантов: $9+56+21=30+56=86$

Ответ: 86.

№3 (продолжение).

$$CB^2 + x\cdot CB - 20x - 100 = 0,$$

$$CB^2 + \frac{5\cdot CB}{\cos 80^\circ} - 100\left(\frac{1}{\cos 80^\circ} + 1\right) = 0,$$

$$D = \frac{5^2}{\cos^2 80^\circ} + 400\left(\frac{1}{\cos 80} + 1\right)$$

$$D = \frac{425}{\cos^2 80^\circ} + 400 \;;\; \sqrt{D} = 5\sqrt{\frac{85}{\cos^2 80^\circ} + 80}$$

$$CB = \frac{-\frac{5}{\cos 80^\circ} + 5\sqrt{\frac{85}{\cos^2 80^\circ} + 80}}{2}$$

8. По ф-ле бис-сы:

$$BM = \frac{2\cdot\frac{5}{\cos 80^\circ}\cdot\frac{-\frac{5}{\cos 80^\circ} + 5\sqrt{\frac{85}{\cos^2 80^\circ}+80}}{2}}{\frac{5}{\cos 80^\circ} + \frac{-\frac{5}{\cos 80} + 5\sqrt{\frac{85}{\cos^2 80^\circ}+80}}{2}}\cdot\cos 60^\circ$$

$$BM = \frac{\frac{5}{\cos 80^\circ}\cdot\left(-\frac{5}{\cos 80} + 5\sqrt{\frac{85}{\cos^2 80^\circ}+80}\right)}{\frac{5}{2\cos 80^\circ} + \frac{5\sqrt{\frac{85}{\cos^2 80^\circ}+80}}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$