



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Нигматуллина Диана Дмитриевна**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a + 13)x^2 + (2a + 9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты OT2020 всего две буквы: буква O и буква T . Все слова начинаются на букву O и заканчиваются тоже на букву O . В любом слове буква O не может соседствовать с другой буквой O . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы T . Например, слова OTTO, OTOTOTO, OTTOTOTTO являются допустимыми, а слова OTTOT, OTOOTO, OTOTTTO – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1.

Пусть b - основание прогрессии, q - знаменатель
Тогда прогрессия:

$$b \quad bq \quad bq^2 \quad bq^3 \quad bq^4 \quad bq^5$$

$$\frac{b + bq + bq^2 + bq^3}{4} = 10 \Rightarrow b(1 + q + q^2 + q^3) = 40$$

$$\frac{bq^2 + bq^3 + bq^4 + bq^5}{4} = 90 \Rightarrow bq^2(1 + q + q^2 + q^3) = 360$$

$$q^2 = 9 \quad (\text{делим II ур-ие на I}) \Rightarrow$$

$$q = \pm 3$$

$$\text{I } q = 3 \Rightarrow b(1 + 3 + 9 + 27) = 40 \Rightarrow 40b = 40 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$$

$$\# \text{ VI член} = bq^5 = 1 \cdot 3^5 = 243$$

$$\text{I } q = -3 \Rightarrow b(1 - 3 + 9 - 27) = 40 \Rightarrow -20b = 40 \Rightarrow b = -2$$

$$\text{VI член} = bq^5 = -2 \cdot (-3)^5 = +486 = 486$$

Ответ: 243, 486

№2.

$$\sin 5x = \sin \pi x$$

$$5x = \frac{5\pi x}{180^\circ} = \frac{\pi}{36} x \text{ радian}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{36} x\right) = \sin \pi x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{36} x\right) - \sin \pi x = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{37\pi x}{72}\right) \sin\left(\frac{35\pi x}{72}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{37\pi x}{72} = 0 \\ \sin \frac{35\pi x}{72} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$I \quad \cos \frac{37\pi}{72} x_1 = 0 \Rightarrow \frac{37\pi}{72} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{22k}{37} \quad \frac{37}{72} x_1 = \frac{1}{2} + k \Rightarrow 37x_1 = 36 + 72k$$

$$x_1 = \frac{36}{37} + \frac{72}{37} k = \frac{36 + 72k}{37} = \frac{36(1 + 2k)}{37}$$

$$II \quad \sin \frac{35\pi}{72} x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{35\pi}{72} x_2 = \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_2 = \frac{72k}{35}$$

$$x_1 = \frac{36}{37} t \quad (t = 2n+1, \text{ любое целое нечетное})$$

$$x_2 = \frac{72}{35} k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Найдем min знач.

$$I. \quad \left| \frac{72}{35} k_1 - \frac{72}{35} k_2 \right| = \frac{72}{35} |k_1 - k_2| \geq \frac{72}{35} \quad (\text{корни } x_2)$$

$$II. \quad \left| \frac{36}{37} t_1 - \frac{36}{37} t_2 \right| = \frac{36}{37} |t_1 - t_2| \geq \frac{72}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot 2 \geq \frac{72}{37} \quad (\text{корни } x_1)$$

т.к. нечетные

$$III. \quad \left| \frac{72}{35} k_1 - \frac{36}{37} t_1 \right| = \left| \frac{36}{35 \cdot 37} (2 \cdot 37 k_1 - 35 t_1) \right| =$$

$$= \frac{36}{35 \cdot 37} \left| 24k, -35 \right| \geq \frac{36}{35 \cdot 37} \Rightarrow$$

min расстояние $\frac{36}{35 \cdot 37}$. Пример:

Пусть II корень $\frac{9 \cdot 72}{35}$, а $\cancel{I} = \frac{19 \cdot 36}{37}$ Тогда

$$\frac{9 \cdot 72}{35} - \frac{19 \cdot 36}{37} = \frac{36}{35 \cdot 37} (37 \cdot 18 - 19 \cdot 35) = \frac{36}{35 \cdot 37}$$

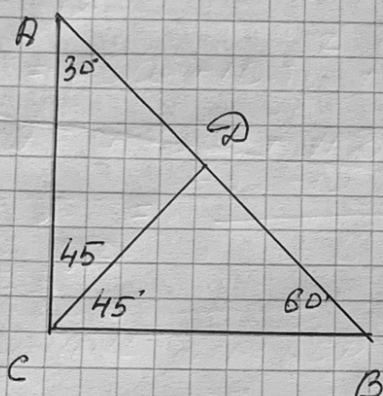
Ответ: $\frac{36}{1295}$

№ 3

Пусть I угол треугольника α , II - 2α . Тогда III угол либо 3α , либо 6α .

I случай. Пусть углы тр-ка $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$.

Тогда $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow 6\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 30, 2\alpha = 60, 3\alpha = 90$



CD - бис угла $\angle ACB$

$$AB - AC = 3\sqrt{2}$$

$$AB - AB \cos 30 = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$AB \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$AB = \frac{3\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})$$

По т. синусов: $\frac{CD}{\sin 30^\circ} = \frac{AD}{\sin 45^\circ} \Rightarrow CD = \frac{AD \cdot \sin 30}{\sin 45}$

$$\frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin \angle ADC} \Rightarrow$$

$$\frac{DB}{\sin 45^\circ} = \frac{CB}{\sin \angle CDB}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{CB}$$

$$\sin \angle ADC = \sin \angle CDB \text{ (верные)}$$

$$\sin 45^\circ = \sin 45^\circ$$

По правилу синусов:

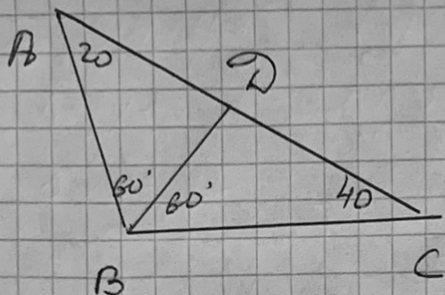
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

(зонамол еб-бо сие)
20130

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{CB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}$$

$$AD = \frac{AD}{AD + DB} \cdot AB \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{1}{\frac{DB + AD}{AD}} = \frac{1}{\frac{1}{2\cos 30^\circ} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})$$

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{6}(2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})}$$

$$9x = 180 \Rightarrow x = 20, 2x = 40, 6x = 120$$


по т. сущу сѡбъ

$$\frac{BD}{\sin 40^\circ} = \frac{DE}{\sin 60^\circ} \Rightarrow$$

$$130 = \frac{20 \cdot \sin 40}{\sin 60}$$

По золотому сеч-ию днс $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{AD}$

$$\frac{BC}{\sin 20^\circ} = \frac{AB}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow$$

$$\frac{DE}{AD} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow DC = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot AD$$

$$\frac{DC}{AD+DC} = \frac{\sin 20}{\sin 40 + \sin 20} \Rightarrow DC = \frac{AC \cdot \sin 20}{\sin 40 + \sin 20}$$

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{AC(1 - \frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ})}{\sin 120^\circ \cdot 3\sqrt{2}} \quad (\text{m.k. } AC(1 - \frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}) = 3\sqrt{2})$$

$$AC - AB = 3\sqrt{2} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{2} \cdot 302}{\sin 120^\circ - \sin 40^\circ}$$

$$BD = \left(\frac{\sin 120^\circ \cdot 3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ - \sin 40^\circ} \right) \left(\frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ} \right) \cdot \left(\frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$13 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} \sin 120 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 20 \cdot \cancel{\sin 40}}{=}$$

$$2 \sin 40^\circ \cos 80^\circ \cdot 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sin 120 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 \sin 10 \cos 10}{4 \cdot \sin 30 \cdot \cos 80 \cdot \cos 10 \cdot \sin 60 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$(\cos 80 = \sin 10)$$

Ombem: $3\sqrt{2}, \frac{6\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}$

№4.

$$3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a-9)x - (a+1) = 0$$

$$(x+1)(3x^2 + (3a+10)x - (a+1)) = 0$$

$$\begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 3x^2 + (3a+10)x - (a+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= (3a+10)^2 + 12(a+1) = 9a^2 + 60a + 100 + 12a + 12 = \\ &= 9a^2 + 72a + 112 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3a+10) \pm \sqrt{D}}{6}$$

Переберем все a от -6 до 5

$$a = -6 \Rightarrow D = 9 \cdot 36 - 72 \cdot 6 + 112 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{18-10 \pm 2}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -\frac{10}{6} \end{aligned} \quad \text{подходит}$$

$$a = -5 \Rightarrow D = 9 \cdot 25 + 72 \cdot (-5) + 112 < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$a = -4 \Rightarrow D = 9 \cdot 16 - 72 \cdot 4 + 112 < 0 \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = -3 \Rightarrow D = 9 \cdot 9 - 72 \cdot 3 + 112 < 0 \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = -2 \Rightarrow D = 9 \cdot 4 - 72 \cdot 2 + 112 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{6} \Rightarrow$$

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{совпадает с другими корнями} \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = -1 \Rightarrow D = 9 - 72 + 112 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm 7}{6} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{14}{6} \end{aligned}$$

$$a = 0 \Rightarrow D = 112 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ не целое} \Rightarrow x_{1,2} \text{ не целые} \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$a = 1 \Rightarrow D = 9 + 72 + 112 = 193 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ не целое} \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = 2 \Rightarrow D = 9 \cdot 4 + 2 \cdot 72 + 112 = 292 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ не целое} \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = 3 \Rightarrow D = 9 \cdot 9 + 3 \cdot 72 + 112 = 409 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ не целое} \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = 4 \Rightarrow D = 9 \cdot 16 + 4 \cdot 72 + 112 = 544 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ не целое} \Rightarrow \text{нет}$$

$$a = 5 \Rightarrow D = 9 \cdot 25 + 5 \cdot 72 + 112 = 697 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ не целое} \Rightarrow \text{нет}$$

Всего 12 вариантов, а подходит 2 $\Rightarrow$ ~~12~~

$$\text{вероятность } \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

и 5.

Пусть a_n - это кол-во n -буквенных слов.

$a_1 \neq 0$, $a_1 = 1$ только слово O

$a_2 = 0$, т.к. OO быть не может

$a_3 = 1$ OTO

Посчитаем сколько слов a_{n+2} длины $(n+2)$. Заметим, что $n+2$ буква O а $n+1$ T .

Если первые n букв заканчиваются на O , тогда это слово длины $n \Rightarrow a_n$ способов

Если они заканчиваются на T , то тогда $n-1$ буква точно O , т.к. TTT быть не может $\Rightarrow$ это слово длины $n-1 \Rightarrow a_{n-1}$ способов

$$a_{n+2} = a_{n-1} + a_n$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}					
16	21	28	37	49	65	86	114					

$$a_{22} = a_{19} + a_{20} = 151$$

Ответ: 151