



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мещерякова Мария Андреевна**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

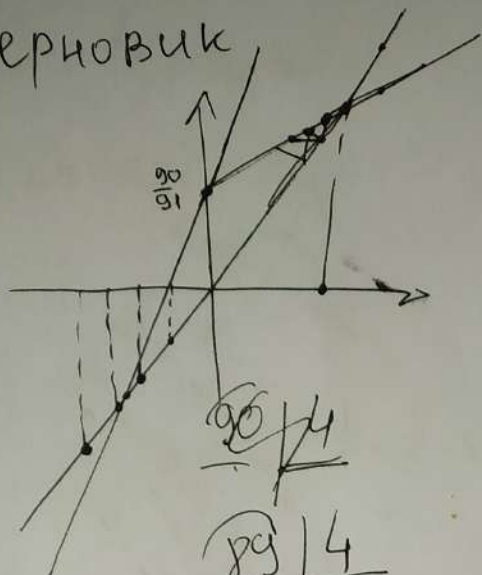
4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a + 4)x^2 + (2a + 3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АВВА, АВАВАВА, АВВАВАВВА являются допустимыми, а слова АВВАВ, АВААВА, АВАВВВА – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Черновик



$$\frac{90}{91}$$

$$\frac{180x}{89} = \frac{90 + 180k}{91}$$

$$\frac{2x}{89} = \frac{1 + 2x}{91}$$

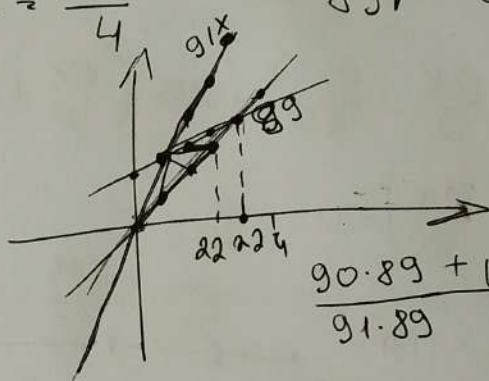
$$\frac{90 + 180k}{91} - \frac{180x}{89}$$

$$2 \cdot 91 \cdot x = 89 + 2 \cdot 89x$$

$$2(91 - 89)x = 89 \quad 90 \cdot 89 + 89 \cdot 180k - 180x$$

$$x = \frac{89}{4}$$

$$89k - 91x \quad 91$$



$$\frac{89 \cdot 90 + 180(89t - 91n)}{89 \cdot 91}$$

$$\frac{90 \cdot 89 + 180(89k - 91x)}{91 \cdot 89}$$

$$3x^3 + (3a + 4)x^2 + (2a + 3)x - a + 2 = 0$$

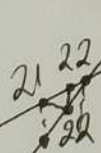
$$a + 2 = t$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{a - 2}{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-4 - 3a}{3} = (-a - 1) - \frac{1}{3} \quad \frac{90 \cdot 89 - 180 \cdot 22 \cdot 2}{91 \cdot 89}$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 = \frac{2a + 3}{3} = \left(\frac{2a}{3}\right) + 1$$

$$3x^3 + (3t - 2)x^2 + (2t - 1)x + t = 0$$



$$89 \cdot 90 - 22 \cdot 180 \cdot 2$$

$$89 \cdot 91$$

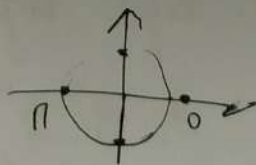
$$90 \cdot 89 + 180(89 \cdot 22 - 91 \cdot 22)$$

$$91 \cdot 89$$

$$\frac{90 \cdot 89 + 180(89 \cdot 22 - 91 \cdot 22)}{91 \cdot 89}$$

Черновики

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)$$



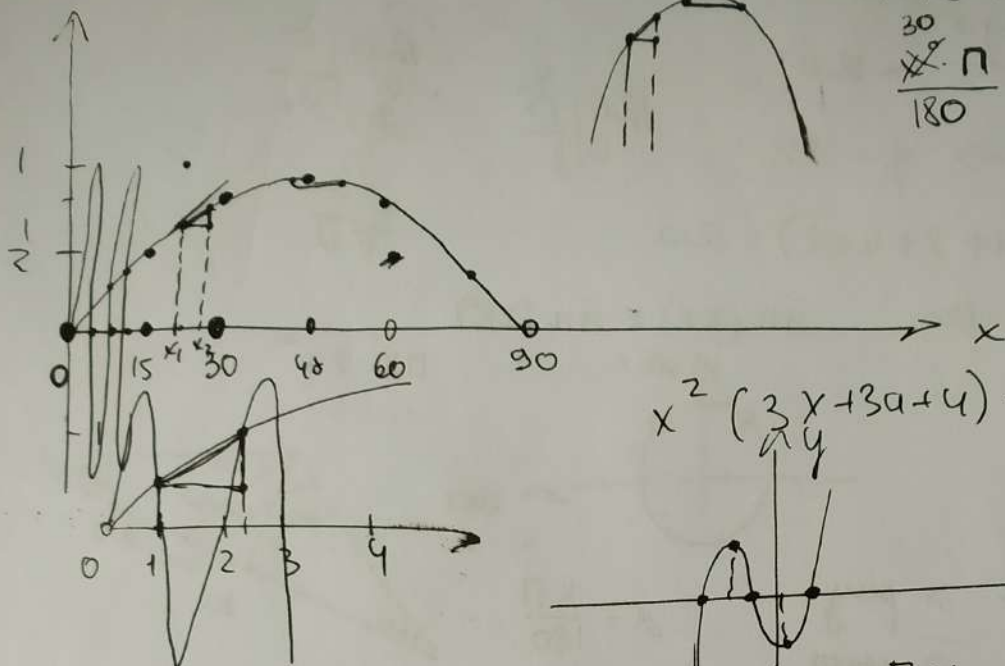
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

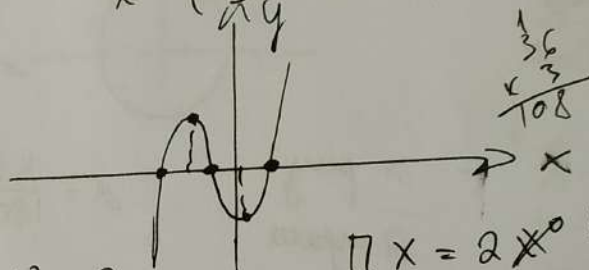
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{30 \cdot \pi}{180}$$



$$x^2 (3x + 3a + 4) +$$



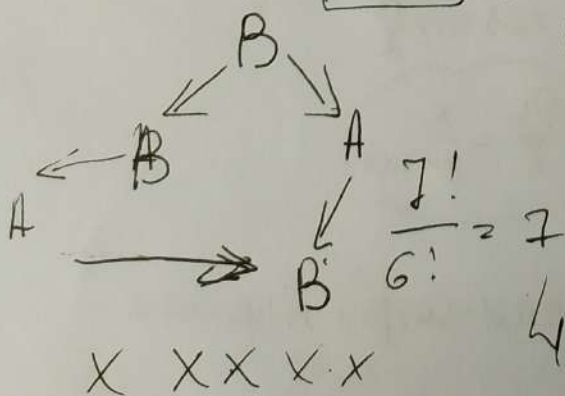
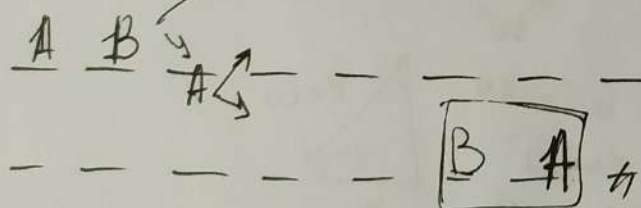
$$9x^2 + (3a+4)x + 2a+3 = 0$$

$$\pi x = 2 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$P = 9a^2 + 24a + 16 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot a - 36 \cdot 3 = \pi x = \frac{\pi x}{90}$$

$$= 9a^2 - 72a + 24a - 108 + 16 = - \begin{matrix} \boxed{BBA} \\ \boxed{BA} \end{matrix} - x \cdot k.$$

$$B \rightarrow A \rightarrow B$$



$$x=4, y=4$$

$$\begin{aligned} 20 & \quad x=6 \\ 3x + 2y &= 20 \quad 18 \quad y=2 \\ 3x &= 20 - 2y \end{aligned}$$

$$x=2$$

$$6 = 20$$

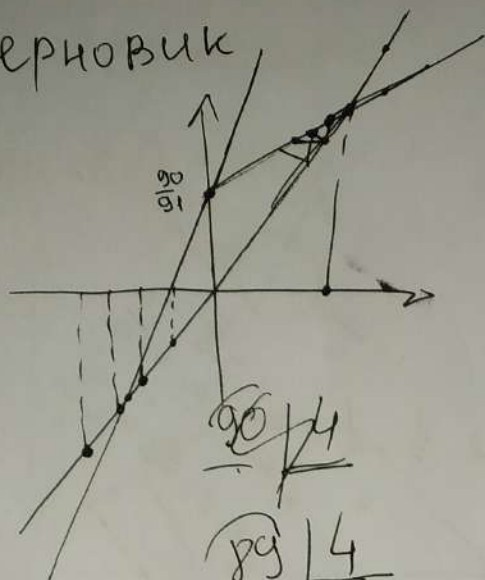
$$14 = 2y = 7$$

$$\frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 18$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

35.

Черновик



$$\begin{array}{r} 90 \overline{) 4} \\ 89 \overline{) 4} \\ \underline{1} \end{array}$$

$$\frac{90}{91}$$

$$\frac{180x}{89} = \frac{90 + 180k}{91}$$

$$\frac{2x}{89} = \frac{1 + 2x}{91}$$

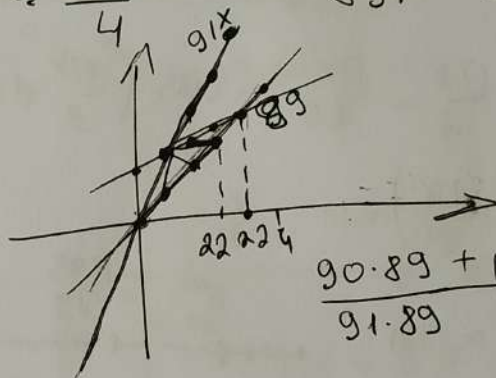
$$\frac{90 + 180k}{91} - \frac{180x}{89}$$

$$2 \cdot 91 \cdot x = 89 + 2 \cdot 89x$$

$$2(91 - 89)x = 89 \quad 90 \cdot 89 + 89 \cdot 180k - 180x$$

$$x = \frac{89}{4}$$

$$89k - 91x \quad 91$$



$$\frac{89 \cdot 90 + 180(89 \cdot 22 - 91 \cdot 4)}{89 \cdot 91}$$

$$\frac{90 \cdot 89 + 180(89k - 91x)}{91 \cdot 89}$$

$$3x^3 + (3a + 4)x^2 + (2a + 3)x - a + 2 = 0$$

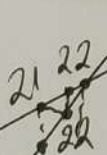
$$a + 2 = t$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{2t - 2}{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-4 - 3a}{3} = (-a - 1) - \frac{1}{3} \quad \frac{90 \cdot 89 - 180 \cdot 22 \cdot 2}{91 \cdot 89}$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 = \frac{2a + 3}{3} = \left(\frac{2a}{3}\right) + 1$$

$$3x^3 + (3t - 2)x^2 + (2t - 1)x + t = 0$$



$$89 \cdot 90 - 22 \cdot 180 \cdot 2$$

$$89 \cdot 91$$

$$90 \cdot 89 + 180(89 \cdot 22 - 91 \cdot 22)$$

$$91 \cdot 89$$

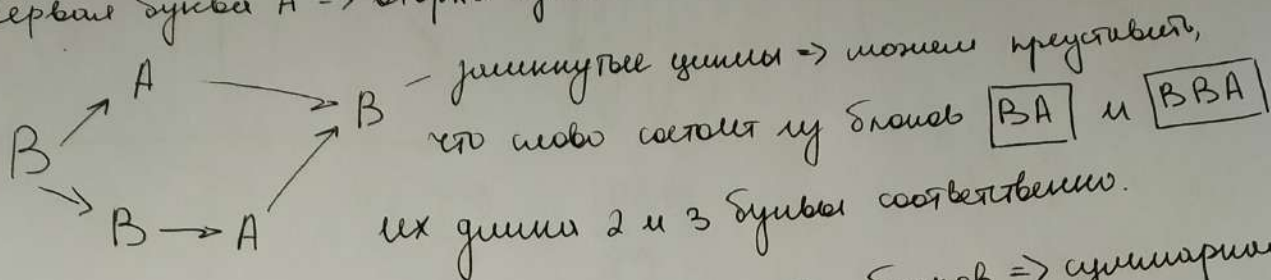
$$\frac{90 \cdot 89 + 180(89 \cdot 22 - 91 \cdot 22)}{91 \cdot 89}$$

ЧИСЛОВИК

ЛИСТ №4

№5

Первая буква A $\Rightarrow$ вторая буква B



Все слово, кроме первой буквы, состоит из этих блоков $\Rightarrow$ суммарная

длина этих блоков $= 21 - 1 = 20$

Пусть блоков $\boxed{BA}$ — x штук; $\boxed{BBA}$ — y штук, тогда длины слова:

$$2x + 3y = 20; \quad x \text{ и } y \geq 0 \text{ и } \in \mathbb{Z}$$

$$3y = 20 - 2x = 2(10 - x) \Rightarrow y \text{ — должно быть четным}$$

$$1) \quad y = 0 \Rightarrow x = 10, \text{ кол-во таких слов} = N_1 = 1$$

$$2) \quad y = 2 \Rightarrow x = 7; \text{ кол-во таких слов } N_2 = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

$$N = \frac{(x+y)!}{x! \cdot y!}; \quad (x+y)! - \text{кол-во всех возможных перестановок блоков}$$

$x!$ и $y!$ кол-во перестановок между блоками, общий

вид слова при которых не учитываются

$$3) \quad y = 4 \Rightarrow x = 4; \text{ кол-во таких слов} = N_3 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

$$4) \quad y = 6 \Rightarrow x = 1; \text{ кол-во таких слов} = N_4 = \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 7$$

Тогда общее кол-во таких слов $= N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$

$$N = 1 + 36 + 70 + 7 = 106 + 8 = 114$$

Ответ 114 слов.

✓2

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi x}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{90}\right)$$

$$\sin(\pi x) - \sin\left(\frac{\pi x}{90}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x}{180}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{180}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{89\pi x}{180}\right) = 0 \Rightarrow \frac{89\pi x}{180} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{180n}{89}; n \in \mathbb{Z}$$

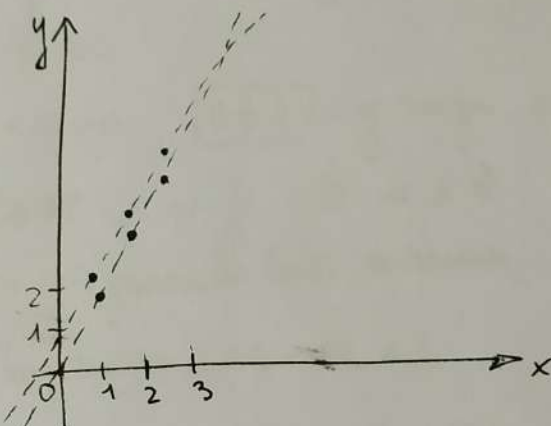
$$\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{180}\right) = 0 \Rightarrow \frac{91}{180} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{90 + 180t}{91}; t \in \mathbb{Z}$$

$$y_1 = \frac{180n}{89} = \frac{180x}{89}; x \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = \frac{180x + 90}{91}; x \in \mathbb{Z}$$

$$y_2(x) - y_1(x) \text{ будет}$$

минимальным при
целых значениях x ; так



функции минимизируем разрыв между ними. Чем ближе к точке пересечения, тем меньше разрыв. Это значение будет в * точке минимально приближенной к точке пересечения.

$$\frac{180x}{89} = \frac{180x + 90}{91} \Leftrightarrow 2x \cdot 91 = 2x \cdot 89 + 89 \Leftrightarrow 2x \cdot 2 = 89 \Rightarrow x = \frac{89}{4} = 22 \frac{1}{4} =$$

$\Rightarrow$ наиболее приближенное ^{целое} значение к $x = 22 \frac{1}{4}$ это 22

$$(y_2 - y_1)_{\min} = y_2(22) - y_1(22) = \frac{180 \cdot 22 + 90}{91} - \frac{180 \cdot 22}{89} = \frac{89 \cdot 90 + 180 \cdot 22 \cdot (89 - 91)}{89 \cdot 91} =$$

$$= \frac{8010 - 7920}{8099} = \frac{90}{8099}$$

Ответ $\frac{90}{8099}$

УСТОЯЛИК

МУСТ №2

Т. аналогично для $\triangle CMG$: $\frac{MC}{\sin(\angle CGM)} = \frac{CG}{\sin(\angle GMC)}$

$$\sin(\angle CGM) = \sin(60+45) = \sin 60 \cdot \cos 45 + \sin 45 \cdot \cos 60 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(\angle GMC) = \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{AB \cdot 4^2}{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{CG \cdot 2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{AB}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{CG}{\sqrt{3}} \Rightarrow CG = \frac{\sqrt{3} AB}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$AB = AC + 20$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC + 20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2AC = \sqrt{3} AC + 20\sqrt{3} \Rightarrow AC = \frac{20\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{20\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + 20 = \frac{20\sqrt{3} + 40 - 20\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{40}{2 - \sqrt{3}}$$

$$CG = \frac{\sqrt{3} \cdot 40}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$$

2) Пусть $3\alpha = 6\alpha$

Расположение сторон и углов аналогично

рисунку 1; $\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 20$; $9\alpha = 180$

Т. $F \in AB$ и $AF = AC \Rightarrow AB = AC + 20 \Rightarrow FB = AB - AC = 20$

$$\angle ACF = \angle AFC = \frac{180 - \alpha}{2} = \frac{9\alpha - \alpha}{2} = 4\alpha$$

$$\Rightarrow \angle CFA = \angle CBF + \angle BCF \Leftrightarrow 4\alpha = 2\alpha + \angle BCF \Rightarrow \angle BCF = 2\alpha$$

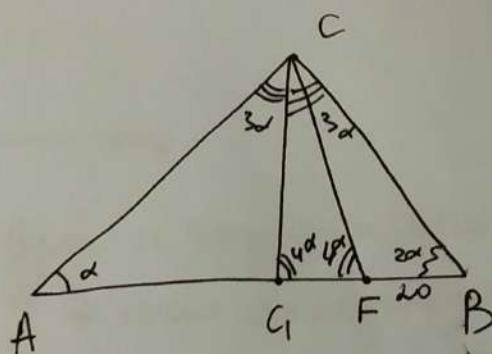
$$\left. \begin{array}{l} \angle BCF = 2\alpha \\ \angle CBF = 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CFB - \text{p.i.s.} \Rightarrow FB = CF = 20$$

$$\angle ACG = \angle GCB = \frac{1}{2} \cdot \angle ACB = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha$$

$$\angle CGB - \text{внешний } \triangle ACG \Rightarrow \angle CGB = \angle ACG + \angle CAG = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$$

$$\angle CFG = \angle CGF = 4\alpha \Rightarrow \triangle CGF - \text{p.i.s.} \Rightarrow CG = CF = FB = 20$$

Ответ $CG = \frac{40\sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$; $CG = 20$



ЧИСЛОВИК

Лист №1

№1

Члены прогрессии: $b_1; b_1q; b_1q^2; b_1q^3; b_1q^4; b_1q^5$

$$\frac{b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3}{4} = 30 \Leftrightarrow \frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4} = 30 \quad (1)$$

$$\frac{b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5}{4} = 120 \Leftrightarrow \frac{b_1q^2(1+q+q^2+q^3)}{4} = 120 \quad (2)$$

$$(2):(1) \quad \frac{b_1q^2(1+q+q^2+q^3) \cdot 4}{4 \cdot b_1(1+q+q^2+q^3)} = \frac{120}{30} \Leftrightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$$

$$q = 2: b_1(1+2+4+8) = 120 \Leftrightarrow 15b_1 = 120 \Rightarrow b_1 = \frac{120}{15} = 8$$

$$\text{Четвертый член: } b_1 \cdot q^3 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$q = -2: b_1(1-2+4-8) = 120 \Leftrightarrow -5b_1 = 120 \Rightarrow b_1 = -\frac{120}{5} = -24$$

$$\text{Четвертый член: } b_1 \cdot q^3 = -24 \cdot (-8) = 192$$

Ответ 64 и 192

№3

Дано: $\triangle ABC; AB > AC > BC$

$$AB = AC + 20; \alpha; 2\alpha \text{ и } 3\alpha$$

Найти: $\angle C$

Решение: Пусть $\angle C = 3\alpha$

Он самый большой $\Rightarrow$ лежит против самой большой стороны (т.е. AB)

2α - лежит против AC и α - против BC

$$2\alpha + 3\alpha + \alpha = 180 \Leftrightarrow 6\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 30 \Rightarrow \angle ACB = 3 \cdot 30 = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BCA$ - прямоугольный; CM - медиана $\Rightarrow CM = \frac{AB}{2}$

$$\angle MCA = \angle MAC = \alpha \Rightarrow \angle GMC = 2\alpha; \angle MGC = \angle GBC + \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ + 45^\circ$$

$$\angle GMC = 60^\circ$$

