МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Головина Ксения Денисовна**

Технический балл: **85**

Дата: **1 марта 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

*Вариант **6–1***

1. Что больше: число $\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} - \sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}$ или наибольший корень уравнения $x^2 + 2020x - 6069 = 0$?

2. Точка O является центром окружности, касающейся двух сторон треугольника ABC, и лежит на стороне BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $OB = 2$, $OC = \frac{3}{2}$, $AC = 3$.

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ x\sqrt{xy} + 78 = -y\sqrt{xy}. \end{cases}$$

4. Цилиндрическую кружку радиуса 1 и высоты 2, наполненную доверху водой, наклонили на угол $30°$. Найдите отношение объема вылившейся воды к исходному объему.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+18}} \leqslant \sqrt{a}$$

выполняется при всех значениях x.

февраль-март 2020 г.

Шифр

Черновик

$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} - \sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}$

$x^2+2020x-6069=0$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2023 \end{array}\right.$

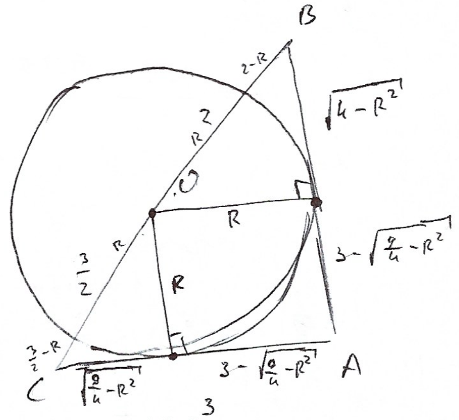
$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} = \sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}+3$

$5\sqrt{13}+18 \qquad 5\sqrt{13}-18+9(5\sqrt{13}-18)^{\frac{2}{3}}+27(5\sqrt{13}-18)^{\frac{1}{3}}+27$

$\times\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 3{,}6 \\ 3{,}6 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$

36

3



$\left(\frac{3}{2}-R\right)\left(\frac{3}{2}+R\right)=a^2$

$a=\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}$

$\frac{3}{\frac{R}{2}} = \frac{3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}+\sqrt{4-R^2}}{\frac{R}{\frac{3}{2}}}$

$6 = \frac{3}{2}\left(3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}+\sqrt{4-R^2}\right)$

$4 = 3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}+\sqrt{4-R^2}$

$1+\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=\sqrt{4-R^2}$

$3-\frac{9}{4}$

$1+\frac{9}{4}-\cancel{R^2}+2\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=4-\cancel{R^2}$

$2\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=\frac{3}{4}$

$\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=\frac{3}{8}$

$\frac{9}{4}-R^2=\frac{9}{64}$

$R^2=\frac{9\cdot15}{64}$

$R=\frac{3\sqrt{15}}{8}$

$R_0=\frac{3}{2\frac{R}{2}}=\frac{3}{R}=\frac{8}{\sqrt{15}}$

Черновик

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + 78 = -y\sqrt{xy} \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = a \quad \sqrt{xy} = b$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} = \frac{7}{b} + 1 \\ -ab^2 + 78 = +\frac{b^2}{a} \end{cases}$$

$a^2b + b = 7a + 1$ $\quad x < 0$

$-a^2b^2 + 78a = +b^2$ $\quad y < 0$

$$\begin{cases} (a^2+1)b^2 = 78a \\ (a^2+1)b = 7a+1 \end{cases}$$

$b = \frac{7a+1}{a^2+1}$

$b^2 = \frac{78a}{a^2+1}$

$\frac{49a^2+14a+1}{(a^2+1)^2} = \frac{78a}{a^2+1}$

$b = \frac{78a}{7a+1} = \frac{7a+1}{a^2+1}$

$49a^2+14a+1 = 78a^3 + 78a$

$b = \frac{7(7a+1)\cdot\frac{78}{7} - \frac{78}{7}}{7a+1} =$

$78a^3 - 49a^2 + 64a - 1 = 0$

$78 - 49 + 64 - 1 \quad = \frac{78}{7} - \frac{78}{7(7a+1)}$

$\frac{2}{\sqrt{39}} - \frac{49}{39} + \frac{64}{\sqrt{39}} - 1$

$\frac{1}{8} \quad 78 \cdot \frac{1}{8} = 9\frac{3}{4}$ $\quad 49 \cdot \frac{1}{4}$

$9\frac{3}{4} - 12\frac{1}{4} + 32 - 1$

$78 = 39 \cdot 2$

$\frac{1}{7}$

$\frac{78}{64} - \frac{49}{16} + 16 - 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{\sqrt{39}}$

$b = \frac{7a+1}{a^2+1} \quad b^2 = \frac{78a}{a^2+1}$

$\frac{a}{b} = y \quad b^2 = xy$

$x = ab = \frac{a(7a+1)}{a^2+1}$

$xy = \frac{78a}{a^2+1}$

$y = \frac{78}{7a+1}$

$x = \frac{a(7a+1)}{a^2+1} \quad a = \sqrt{\frac{x}{y}}$

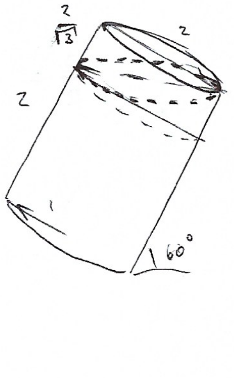
$y\left(7\sqrt{\frac{x}{y}} + 1\right) = 78$

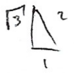
$x \cdot \left(\frac{x}{y} + 1\right) = 7\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}}$

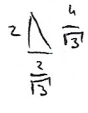
$7\sqrt{xy} + y = 78$

$x^2 + xy = 7x + \sqrt{xy}$

$78a^3 - 49a^2 + 64a - 1 = 0$







$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Шифр

Черновик

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+18}} \leq \sqrt{a}$$

$$\left(\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+18}\right)' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+18}} = 0$$

-2

$D=4$

$$(x+1)\sqrt{x^2+6x+18} + (x+3)\sqrt{x^2+2x+5} = 0$$

$4-12+18=10$

$4-4+5$

$$\frac{1}{4}-9+18 = \frac{37}{4}$$

$$\frac{1}{4}-3+5 = \frac{9}{4}$$

$-\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$

-125, 9, 116

$$-\frac{9}{25}+5 = \frac{116}{25}$$

$$\sqrt{\frac{81}{25}-\frac{18}{5}+5} =$$

$$(x+1)\sqrt{x^2+6x+18} = -(x+3)\sqrt{x^2+2x+5} \quad x\in[-1;-3].$$

$$(x^2+2x+1)(x^2+6x+18) = (x^2+6x+9)(x^2+2x+5)$$

$$a(b+9) = b(a+4)$$

$$9a = 4b$$

$$9(x^2+2x+1) = 4(x^2+6x+9)$$

$18-24$

$9-36$

$$5x^2-6x-27=0$$

$\cancel{D=36}$

$\frac{2\sqrt{29}}{5}$

$$\frac{D}{4} = 9+135 = 144$$

$116 \,|\, \frac{29}{4}$

$$\sqrt{\frac{81}{25}-\frac{18}{5}+5} = \sqrt{\frac{81-90+125}{25}} = \frac{\sqrt{116}}{5} \qquad x = \frac{3\pm 12}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 - \text{н.к.} \\ x = -1{,}8 \end{array}\right. \quad \frac{-9}{5}$$

$$\sqrt{\frac{81}{25}-\frac{54}{5}+18} = \sqrt{\frac{81-270+450}{25}} = \frac{\sqrt{261}}{5} = \frac{3\sqrt{29}}{5} \quad 180 \quad 261$$

$$87\cdot 3 = 29\cdot 3^2$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+78 = -y\sqrt{xy} \end{cases} \qquad \begin{cases} -(x+y) = 7+\sqrt{xy} \\ \sqrt{xy}(x+y)+78=0 \end{cases} \quad x<0,\ y<0$$

$\sqrt{xy}=a$

$x+y=b$

$78 \cdot 4 = 312$ $\quad 39\cdot 2$

$$\begin{cases} -b = 7+a \\ ab = -78 \end{cases} \qquad -a(7+a) = -78 \qquad \cancel{-a^2-7a+78=0} \qquad a^2+7a-78=0$$

$[a=$

$$D = 49+312 = 360$$

$$a = \frac{-7\pm 6\sqrt{10}}{2}$$

$$xy = a^2 = \frac{49+360-84\sqrt{10}}{4} = \frac{409-84\sqrt{10}}{4}$$

$$x+y = \frac{-7-6\sqrt{10}}{2}$$

$$a = \frac{-7+6\sqrt{10}}{2}$$

$$-x\left(x+\frac{7+6\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{409-84\sqrt{10}}{4}$$

$$b = -7+\frac{7-6\sqrt{10}}{2} = \frac{-7-6\sqrt{10}}{2}$$

$$x^2+\frac{7+6\sqrt{10}}{2}x+\frac{409-84\sqrt{10}}{4} = 0$$

$$D = \frac{409+84\sqrt{10}}{4} - \frac{409-84\sqrt{10}}{4} = 42\sqrt{10}$$

$$x = \frac{-\frac{7+6\sqrt{10}}{2}\pm\sqrt{42\sqrt{10}}}{2}$$

361

$19\cdot 19$: 171, 19, 361

Чистовик.

① $x^2+2020x-6069=0$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \quad \text{— наиб.} \\ x=-2023 \end{array}\right.$

$3{,}6 \cdot 3{,}6 = 12{,}96 \approx 13$

$5\sqrt{13} \approx 5\cdot 3{,}6 = 18$

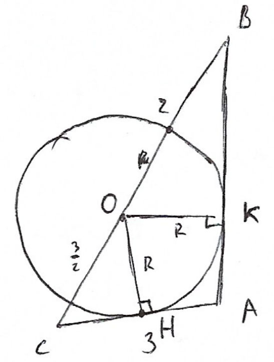
$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} - \sqrt[3]{5\sqrt{13}-18} \approx \sqrt[3]{36} - 0$

$\sqrt[3]{36} > 3$

$36 > 27$

$\sqrt[3]{5\sqrt{13}+18} - \sqrt[3]{5\sqrt{13}-18} > 3$

②



$LH=\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}$ $\quad HA = 3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}$

$BK=\sqrt{4-R^2}$ $\quad AK = HA = 3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}$

$\frac{AC}{\sin\angle OBK} = \frac{AB}{\sin\angle OCH}$

$\frac{3}{\frac{R}{2}} = \frac{3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}+\sqrt{4-R^2}}{\frac{R}{\frac{3}{2}}}$

$6 = \frac{3}{2}\left(3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}+\sqrt{4-R^2}\right)$

$4=3-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}+\sqrt{4-R^2}$

$1=\sqrt{4-R^2}-\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}$

$1+\frac{9}{4}-R^2+2\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=4-R^2$

$2\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

$\sqrt{\frac{9}{4}-R^2}=\frac{3}{8}$

$\frac{9}{4}-R^2=\frac{9}{64}$

$R^2=\frac{9\cdot 15}{64} \Rightarrow R=\frac{3\sqrt{15}}{8}$

$R_0=\frac{AC}{2\sin\angle OBK}=\frac{3}{2\cdot\frac{R}{2}}=\frac{8}{\sqrt{15}}$

Ответ: $R_0=\frac{8\sqrt{15}}{15}$

Шифр

Чистовик

(3)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 & (1) \\ x\sqrt{xy} + 78 = -y\sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

Если $x > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow$ 2 выраж: $\overset{0}{x\sqrt{xy}} + \overset{0}{78} = \overset{0}{-y\sqrt{xy}}$ н.р.

$x < 0,\ y < 0$

$$\begin{cases} -x - y = 7 + \sqrt{xy} \\ (x+y)\sqrt{xy} + 78 = 0 \end{cases}$$

$x + y = a \quad a < 0$

$\sqrt{xy} = b \quad b > 0$

$$\begin{cases} a + b + 7 = 0 \\ ab + 78 = 0 \end{cases}$$

$a(-a-7) + 78 = 0$

$a^2 + 7a - 78 = 0 \qquad D = 49 + 78 \cdot 4 = 361 = 19^2$

$a = \frac{-7 \pm 19}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} a = 6 \ \text{— н.к.} \\ a = -13 \end{array}\right.$$

$b = -a - 7 = 6$

$$\begin{cases} x + y = -13 \\ xy = 36 \end{cases} \qquad -x(13 + x) = 36$$

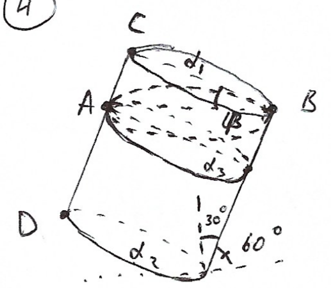
$x^2 + 13x + 36 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = -9 \\ x = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -4 \\ y = -9 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -9 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases} \end{array}\right.$

Чистовик

4



Цилиндр ограничен плоскостями α_1 и α_2. ($\alpha_1 \parallel \alpha_2$)

После наклона кружки вода ограничена плоск. α_2, β и бок. пов-тью.

Угол между α_1 и β = углу наклона = 30°.

Пусть вода соприк. с краем кружки в т. B.

BC – радиус кружки; $A \in \beta$, $AC \perp \alpha_1$; $D \in \alpha_2$, $CD \perp \alpha_1$, $A \in \alpha_3$, $\alpha_3 \parallel \alpha_1$.

Фигура, огранич. α_1, β и бок. пов. (V_1) = фигуре, огранич. α_3, β и бок. пов. (V_2) => $V_1 = V_2$ (β делит фиг. огр α_1, α_3 и бок. пов. пополам)

$$AC = BC \cdot tg\, 30° = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$CD = h = 2$$

~~Фигура, огранич. α_2~~, α_3

$$\frac{V_1 + V_2}{V_0} = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V_1 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) = \frac{V_0}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

V_1 – объем вылившейся воды.

V_0 – общий объем цилиндра

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Чистовик

5) $$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+18}} \le \sqrt{a}$$

x^2+2x+5 — $D<0 \Rightarrow f$ всегда >0

$x^2+6x+18$ — $D<0 \Rightarrow f$ всегда >0

$$\left(\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+18}\right)' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+18}} = 0$$

$$(x+1)\sqrt{x^2+6x+18} = -(x+3)\left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)$$

$$\begin{cases} x\in(-3;-1). \\ (x^2+2x+1)(x^2+6x+18) = (x^2+6x+9)(x^2+2x+5) \end{cases}$$

$x^2+2x+1 = a \qquad a>0$

$x^2+6x+9 = b \qquad b>0$

$a(b+9) = b(a+4)$

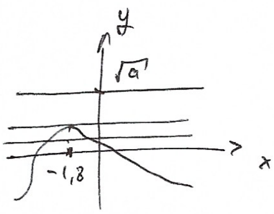
$9a = 4b$

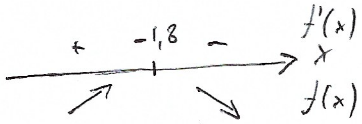
$9(x^2+2x+1) = 4(x^2+6x+9)$

$|3(x+1)| = |2(x+3)|$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ — н.к.} \\ x = -\frac{9}{5} \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+18}}$$





$$f(-1{,}8) = \frac{1}{\sqrt{\frac{81}{25}-\frac{18}{5}+5}+\sqrt{\frac{81}{25}-\frac{54}{5}+18}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{29}}{5}+\frac{3\sqrt{29}}{5}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

Когда $\sqrt{a} \ge \frac{1}{\sqrt{29}}$ условие выполняется для любого x

Когда $\sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{29}}$ для части x усл. не выполн.

$\Downarrow$

$$\sqrt{a} \ge \frac{1}{\sqrt{29}}$$

Ответ: $a \ge \frac{1}{29}$