МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Самойлова София Эдуардовна**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1.

Пусть первый член геометрической прогрессии – b_1. А разность прогрессии – q.

Тогда по условию:

$$\frac{b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3}{4} = 15.$$

$$b_1(1+q+q^2+q^3) = 60. \quad (1)$$

и

$$\frac{b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5 + b_1q^2}{4} = 60.$$

$$b_1q^2(1+q+q^2+q^3) = 240. \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{b_1q^2(1+q+q^2+q^3)}{b_1(1+q+q^2+q^3)} = q^2 = \frac{240}{60} = 4.$$

т.е. $q = \pm 2$.

$$1+q+q^2+q^3 = \frac{q^4-1}{q-1} = \frac{16-1}{q-1} = \frac{15}{q-1}.$$

т.е.

$$1+q+q^2+q^3 = \frac{15}{2-1} = 15.$$

или

$$1+q+q^2+q^3 = \frac{15}{-2-1} = -5.$$

1) $b_1 = \dfrac{60}{1+q+q^2+q^3} = \dfrac{60}{15} = 4.$

и тогда последний член: $b_1q^5 = 4(2)^5 = 2^7 = 128$

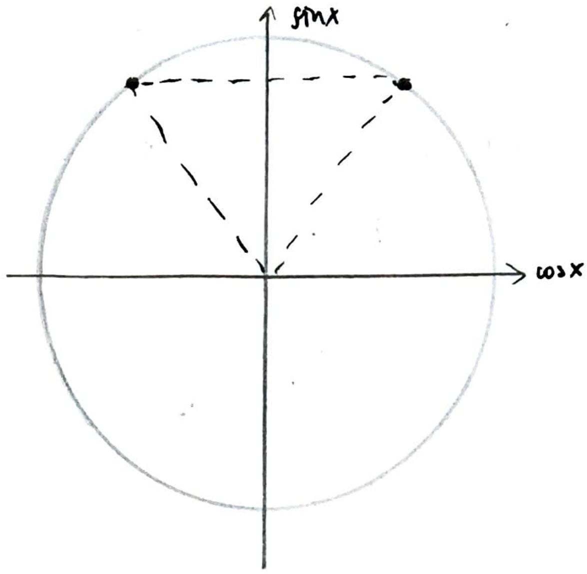
2) $b_1 = \dfrac{60}{1+q+q^2+q^3} = \dfrac{60}{-5} = -12$

и тогда последний член: $b_1q^5 = -12(-2)^5 = 384.$

Ответ: 128 или 384.

№2.

$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$.



$2\pi = 360^\circ$

$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$.

$3x^\circ = \frac{3x\cdot\pi}{180} = \frac{x\cdot\pi}{60}$

$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$

Если равны синусы, то

1) $\pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{59\cdot\pi x}{60} = 2\pi k \quad \cancel{|:2\pi}$

$\frac{59\cdot x}{60} = 2k$

$x = \frac{120k}{59}$.

2) $\pi x = \pi - \frac{\pi x}{60} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{61\pi x}{60} = \pi + 2\pi n \quad |:\pi$

$\frac{61}{60}x = 1 + 2n$

$x = \frac{60}{61}(1+2n)$

Расстояние между корнями $1^{го}$ типа: $\frac{120\cdot(k+1)}{59} - \frac{120k}{59} = \frac{120}{59} > 1$

$2^{го}$ типа: $-\frac{60\cdot 2n}{61} + \frac{60\cdot 2(n+1)}{61} = \frac{2\cdot 60}{61} = \frac{120}{61} > 1$.

т.е. корни

~~нужно найти когда~~ $\cancel{\frac{120}{61}\cdot n - \frac{120}{59}\cdot k \to \min =}$

$\cancel{= 120\left(\frac{n}{61} - \frac{k}{59}\right) = 120\left(\frac{59n - 61k}{(60+1)(60-1)}\right)}$

т.к. $n, k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{60(1+2n)}{61} - \frac{120}{59}\cdot k \to \min$

$\frac{60+120n}{61} - \frac{120k}{59} = 60\left(\frac{59 + 2\cdot 59n - 2\cdot 61k}{(60+1)(60-1)}\right) =$

$= \frac{60}{3600-1}\cdot\left(59 + 2(59n - 61k)\right)$.

$d = 59 + 2(59n - 61k) \to \min$. если $|d| > 1$.

если это $= \pm 1$, то это min.

~~т.к. если~~ $= 0$, то корни совпали.

то расстояние будет еще больше.

~~т.к.~~ $\cancel{|d| \geq 1}$

т.к. $d \in \mathbb{Z}$.

~~при~~ $\cancel{n = 15, k = 16:}$

$\cancel{59 + 2(59\cdot 15 - 61\cdot 16)}$

$n = 76$; $k = 74$.

$$59 + 2\cdot(59\cdot 76 - 61\cdot 74) = 59 + 2\cdot(60\cdot 76 - 76 - 61\cdot 74) =$$

$$= 59 + 2\cdot(60\cdot 76 - 76 - 60\cdot 74 - 74) = 59 + 2(120 - 150) =$$

$$= 59 - 60 = -1.$$

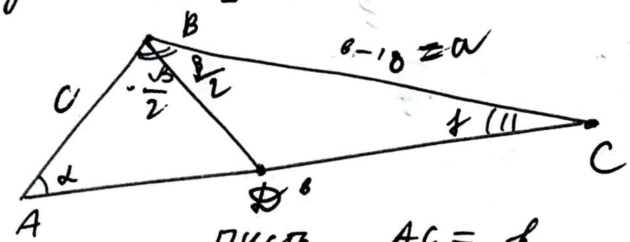
расстояние: $\dfrac{-60}{3600-1} = \dfrac{-60}{3599}$.

или $\dfrac{60}{3599}$ т.к. нет разницы какой знак.

Ответ: $\dfrac{60}{3599}$.

№3.

Пусть в △ ABC : AC — наибольшая сторона.



в треугольнике против наибольшей стороны лежит наибольший угол. т.е. β — наибольший угол. т.е. $\alpha < \beta$; $\gamma < \beta$.

Пусть $AC = b$.

Без ограничения общности пусть $BC = b - 10$, а $AB = c$.

1) Если $\beta = 2\gamma$, то тогда $\alpha = 3\gamma > 2\gamma > \beta$ (противоречие) или $\alpha = 3\beta > \beta$ (противоречие).

2) Если $\beta = 2\alpha$, то аналогично возникает противоречие.

3) Если $\alpha = 2\beta$, тоже противоречие

4) Если $\gamma = 2\beta$, тоже противоречие

5) ~~Если~~ т.е. биссектриса проведена из $\angle ABC$.

~~...~~

по т. синусов:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\gamma}.$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad (1)$$

Мы ~~предположили~~ сказали, что $BC = b - 10$, т.е. второе по величине сторона. Значит $BC \geq AB$.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \geq 1 \Rightarrow \sin\alpha \geq \sin\gamma,$$ (т.к. $\sin\gamma > 0$, $\gamma \in (0; 180°)$) а т.к. $\gamma < \beta$, $\alpha < \beta$ $\Downarrow$ γ и $\alpha < 90°$. то $\alpha \geq \gamma$.

т.е. случай $\gamma = 2\alpha$ невозможен

значит,

6) $\alpha = 2\gamma$.

I. Тогда либо $\beta = 3\alpha = 6\gamma$.

т.е. $\gamma + 6\gamma + 2\gamma = 180°$.

$9\gamma = 180°$

$\gamma = 20°$. $\Rightarrow \beta = 120°$.

по т. синусов

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin 40°}{\sin 20°} = 2\cos 20°$$

$$c = \frac{a}{2\cos 20°} = \frac{5}{2\cos 20° \cdot \cos 80°} = \frac{5}{\cos 90° + \cos 60°} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10.$$

По формуле для биссектрисы BD:

$$BD = \frac{2 \cdot c \cdot (b-10) \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{(c + b - 10)}$$

~~...~~: по т. синусов: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{b-10}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$$\frac{\sin 40° - 4\sin^3 40°}{\sin 40°} = \frac{\sin 120°}{\sin 40°} = \frac{b}{a} = 3 - 4\sin^2 40°$$

$3a - 4a\sin^2 40° = a + 10.$

$2a(1 - 2\sin^2 40°) = 10.$ $\quad a = \frac{5}{\cos 80°} \Rightarrow c = 10$

по неравенству треугольника $BC + AB > AC$.

$a + c > a + 10$.

т.е. $c > 10$.

А у нас $c = 10$. Противоречие.

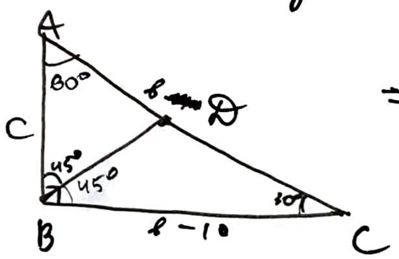
Случай невозможен.

II. Либо $\beta = 3\gamma = \frac{3}{2}\alpha$

$\gamma + 3\gamma + 2\gamma = 180^\circ$.

$6\gamma = 180^\circ$

$\gamma = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ;\ \beta = 90^\circ$.



$\Rightarrow 2c = в$

~~по т. Пифагора~~

~~$4c^2 = c^2 + (2c-10)^2 = 5c^2 - 40c + 100$~~

~~$c^2 - 10c + 100 = 0$~~

~~$D_1 = 400 - 100 = 300$.~~

$\cos 30^\circ = \frac{в - 10}{в}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot в = в - 10$.

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \cdot в = -10$.

$в = \frac{-10}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{-20}{\sqrt{3} - 2} = \frac{-20(\sqrt{3}+2)}{3-4} =$

$= 20(\sqrt{3}+2)$

тогда $BC = в - 10 = 20\sqrt{3} + 40 - 10 = 20\sqrt{3} + 30$.

$c = 10\sqrt{3} + 20$.

$BD = \frac{2 \cdot (20\sqrt{3}+30)(10\sqrt{3}+20) \cdot \cos 45^\circ}{30\sqrt{3}+50} = \frac{200(12+7\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{30\sqrt{3}+50} = \frac{100 \cdot \sqrt{2}(12+7\sqrt{3})}{30\sqrt{3}+50}$.

Ответ: $\frac{100 \cdot \sqrt{2}(12+7\sqrt{3})}{30\sqrt{3}+50}$.

№4.

Заметим, что $x=-1$ всегда корень, т.к.

$$3\cdot(-1)-(3a-4)\cdot 1-(2a-3)\cdot(-1)+a+2=$$
$$=-3-\cancel{3a}+4+\cancel{2a}-3+\cancel{a}+2=0.$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+3x^2} & 3x^2-(3a-1)x+(a+2) \\ \quad -(3a-1)x^2-(2a-3)x & \\ \quad \underline{-(3a-1)x^2-(3a-1)x} & \\ \qquad (a+2)x+a+2 & \\ \qquad \underline{(a+2)x+a+2} & \\ \qquad\qquad 0. & \end{array}$$

Получили квадратное уравнение: $3x^2-(3a-1)x+(a+2)=0$.

$x=-1$ не должен быть корнем, чтобы все были различными.

т.е. $3+3a-1+a+2\neq 0$

$4a+4\neq 0. \Rightarrow \boxed{a\neq -1}$

$$x_{1,2}=\frac{3a-1\pm\sqrt{D}}{6}.$$

$D=9a^2-6a+1-12a-24=9a^2-18a-23>0.$ — условие различия корней и их наличия.

А также $9a^2-18a-23=m^2$, где $m\in\mathbb{Z}$, чтобы хотя бы один из корней был целым. Так как если дискриминант — не полный квадрат, то корни будут иррациональными.

$$(3a-3)^2-m^2=32.$$
$$(\underbrace{3a-3}_{t}-m)(\underbrace{3a-3}_{t}+m)=32.$$

т.к. $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow t\in\mathbb{Z}$ и $\vdots\, 3$.

$-6\le a-1\le 5$

$-18\le 3(a-1)\le 15$

$t\in[-18;15]$.

оба множителя одной четности $\Rightarrow$ они оба четные, т.к. 32 — число четное. (т.е. нет случаев $t-m=\pm 1$ или $t+m=\pm 1$)

1) $\begin{cases} t-m=2\\ t+m=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=9\\ m=7\end{cases}$ $\vdots\, 3$ и $\in[-18;15]$.

Значит, $a=4$.

$D=49$.

$$x_{1,2}=\frac{3\cdot 4-1\pm 7}{6}=\frac{11\pm 7}{6}.\quad \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{18}{6}=3 \checkmark \text{ целое.}\\ x_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Значит $\boxed{a=4}$ подходит.

2) $\begin{cases} t-m=-2\\ t+m=-16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-9\\ m=-7\end{cases} \Rightarrow a=-2.$

$$x_{1,2}=\frac{3\cdot(-2)-1\pm 7}{6}=\frac{-7\pm 7}{6}\quad \left[\begin{array}{l} x_1=0 \checkmark \text{ целое}\\ x_2=-\frac{14}{6}\end{array}\right.$$

Значит, $\boxed{a=-2}$ подходит.

3) $\begin{cases} t-m=4 \\ t+m=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow \quad a=3.$

а $D=4$.

$x_{1,2}=\frac{3\cdot 3-1\pm 2}{6}=\frac{8\pm 2}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{10}{6} \end{cases}$ ✓ целое $\Downarrow$ $\boxed{a=3}$ подходит.

4) $\begin{cases} t-m=-4 \\ t+m=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-6 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad a=-1.$

$x_{1,2}=\frac{3\cdot(-1)-1\pm 2}{6}=\frac{-4\pm 2}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{2}{6} \end{cases}$ – не подходит, т.к. $x=-1$ – кратный корень, а по условию корни различны.

5) $\begin{cases} t-m=8 \\ t+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ m=-2 \end{cases}$ $a=3$. случай аналогичен 3-ему, т.к. $D=m^2=4$, а $a=3$. т.е. значения те же самые.

6) $\begin{cases} t-m=-8 \\ t+m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-6 \\ m=2 \end{cases}$ $a=-1$.

случай аналогичен 4-ому, т.к. $D=4$ и $a=-1$. значения те же.

7) $\begin{cases} t-m=16 \\ t+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=9 \\ m=-7 \end{cases}$ случай аналогичен 1-му, т.к. $D=49$, $a=4$

8) $\begin{cases} t-m=-16 \\ t+m=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-9 \\ m=7 \end{cases}$ случай аналогичен 2-му. т.к. $D=49$, $a=-2$.

Мы разобрали все возможные случаи:

подходят $a=3$; $a=-2$; $a=4$.

всего $a\in\mathbb{Z}$, $a\in[-5;6]$: 12 штук.

$P=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0,25.$

Ответ: 0,25.

№5.

Т.к. на первом и последнем местах буква А, то на втором и $19^{м}$ – буква Б.

после Б может стоять буква А, а после неё сразу только Б.

Или буква Б, но после неё только будет стоять буква А (т.к. не может быть > 2 букв Б рядом). А после „А" обязательно стоит Б.

т.е. либо „АБ", либо „БАБ".

т.е. после одной буквы „Б" может идти только 2 такие комбинации.

Среди 16 неопределенных символов (20−4=16) может быть от 0 до 5 таких комбинаций „БАБ".

т.е. они идут так: поочередно любые из групп. и иначе иное (только группы)

1) Если АБ|БАБ|БАБ $\underbrace{\ldots}_{2\text{ раза БАБ}}$ БАБ|БА. 5 раз.

А

Условие выполнится если мы на $18^{е}$ место поставим „А" иначе будет 3 „Б" подряд.

<u>1 вариант</u>

2) Если 4 раза: следовательно, групп типа „АБ": 2.

Тогда выбираем из 6 групп 4 для „БАБ":

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = \underline{15}\ \text{способов.}$$

Условие выполнится, т.к. будет ....АБ|БА
$18^{й}$ $19^{й}$ $20^{й}$.

т.к. все группы оканчиваются на „АБ".

3) Если 3 раза: то для 15 символов групп типа „АБ": 3.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = \underline{20\ \text{способов.}}$$

Причем остается $18^{й}$ символ и это может быть только „А", т.к. иначе будет 3 „Б".

4) Если 2 раза: ~~для~~ будет 5 групп типа „АБ":

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = \underline{21\ \text{способ.}}$$

условие выполнится (как и во $2^{м}$ пункте)

5) Если 1 раз: для 15 символов будет 6 групп типа „АБ":

6.

$$C_{\cancel{7}}^{1} = \cancel{6}\ \underline{7\ \text{способов.}}$$

и $18^{й}$ символ будет только „А", т.к. иначе будет 3 „Б" подряд.

6) Если 0 таких групп, то 8 групп „АБ“.

$C_1^1 = 1$ способ.

$\underbrace{АБ|АБ|АБ|АБ\ldots|АБ}_{9 \text{ штук}}|БА$

Всего способов: $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+15}_{16}+20}_{36}+21}_{57}+7}_{64}+1 = 65.$

Заметим, что мы посчитали все слова в словаре, т.к. будем однозначно декодировать слово:

АБ – X ; БАБ – Y.

Любое слово в словаре однозначно ~~декодируется~~ с помощью символов X и Y. (первые 18 символов)

А наши слова такие декодируются, т.к. они состоят из групп.

Последние 2 мы не трогаем — они одинаковые.

А первые 2 — это X.

т.е. фактически мы считали способы расставить группы X и Y на 16 местах, где X – 2 места, а Y – 3 места.

Если Y было нечетное количество, то мы рассматривали 15 символов, а 18-й всегда вставляли „А“.

Ответ: 65.