МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лапко Егор Сергеевич**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x)=\sin(2x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3+(3a+4)x^2+(2a+3)x-a+2=0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1

пусть первый член прогрессии b_0, а коэффициент q,

тогда ~~сумма~~ среднее арифметическое первых четырех это $\dfrac{b_0+b_0q+b_0q^2+b_0q^3}{4}=30$

последних четырех $\dfrac{b_0q^2+b_0q^3+b_0q^4+b_0q^5}{4}=120$

разделим одно на другое

$$\frac{(b_0q^2+b_0q^3+b_0q^4+b_0q^5)\cdot 4}{4(b_0+b_0q+b_0q^2+b_0q^3)}=\frac{120}{30}$$

заметим, что

$b_0q^2+b_0q^3+b_0q^4+b_0q^5=q^2(b_0+b_0q+b_0q^2+b_0q^3)$

тогда $q^2=\frac{120}{30}=4$ $q=\pm 2$

1) если $q=2$

то

$\dfrac{b_0+2b_0+4b_0+8b_0}{4}=30$ $15b_0=120$ $b_0=8$

тогда четвертый член $=b_0q^3=8\cdot 8=64$

2) если $q=-2$

$\dfrac{b_0-2b_0+4b_0-8b_0}{4}=30$ $-5b_0=120$ $b_0=-24$

тогда четвертый член $=b_0q^3=-24\cdot(-8)=192$

Ответ: четвертый член равен 64 или 192

№2

$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)$

переводим $2x^\circ$ в радианы

$x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ радиан тогда $2x^\circ = \frac{x\pi}{90}$ радиан

1) $\pi x = \frac{\pi x}{90} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

2) $\pi x = \pi - \frac{\pi x}{90} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

тогда (1) $x = \frac{x}{90} + 2k$ $\quad x\left(1 - \frac{1}{90}\right) = 2k$

$x \frac{89}{90} = 2k$ $\quad x = \frac{180k}{89}$; $k \in \mathbb{Z}$

первая серия

(2) $x\left(1 + \frac{1}{90}\right) = 1 + 2n$ $\quad x = \frac{90(1+2n)}{91}$; $n \in \mathbb{Z}$

вторая серия

разность между двумя корнями разных серий

$\Delta x = \left|\frac{180k}{89} - \frac{90}{91}(1+2n)\right| = \frac{90}{89 \cdot 91}\left|\left(180k - 89(1+2n)\right)\right|$

при $180k - 89(1+2n) = 1$ $\quad \Delta x = \frac{90}{89 \cdot 91}$ минимальна

это достигается при $n = 45$, $k = 45$

$180 \cdot 45 = 90 + 90 \cdot 89 = 90 \cdot 90$ выполнено

если корни ~~совпали~~ совпали

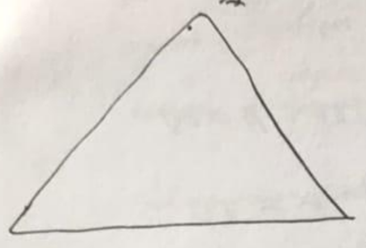
$\underbrace{180k}_{\vdots 2} = \underbrace{89}_{\not\vdots 2}\underbrace{(1+2n)}_{\not\vdots 2}$ одна часть делится на 2 другая нет значит $\Delta x \neq 0$

расстояние между корнями в одной серии

$\frac{180}{89}$ или $\frac{180}{91}$ $\quad \frac{180}{91} > \frac{90}{89 \cdot 91}$ и $\frac{180}{89} > \frac{90}{89 \cdot 91}$

$\Downarrow$

минимальная разность $\frac{90}{89 \cdot 91}$ Ответ: $\frac{90}{89 \cdot 91}$



BC наибольшая

AB вторая по размеру

заметим, что если угол $\left[\begin{array}{l}\gamma = 3\alpha \\ \gamma = 3\beta\end{array}\right.$ и $\alpha = 2\beta$

то γ всегда наибольший угол в обоих случаях

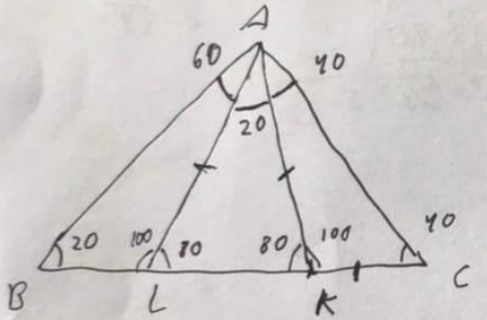
1) случай

$\gamma = 3\alpha = 6\beta$

сумма углов $6\beta + 2\beta + \beta = 9\beta = 180 \quad \beta = 20$

$\gamma = 120$

$\alpha = 40$



Опустим биссектрису AL

и AK, ~~что AK = AL~~

что $\angle LAK = 20^\circ$

тогда $\angle KAC = 60 - 20 = 40$

$\angle KAC = \angle KCA$

$\Downarrow$

$AK = KC$

тогда $\angle AKC = 180 - 40 - 40 = 100$

$\angle ALB = 180 - 20 - 60 = 100$

$\angle AKL = 180 - \angle AKC = 80^\circ$ $\quad \angle ALK = 180 - \angle ALB = 80^\circ$

$\Downarrow$ $\quad \angle AKL = \angle ALK$

$AL = AK = KC$

по условию BC − AB = 20

при этом $\angle BAK = \angle AKD = 80^\circ \Rightarrow AB = BK$

тогда $BC - AB = BC - BK = KC = 20$

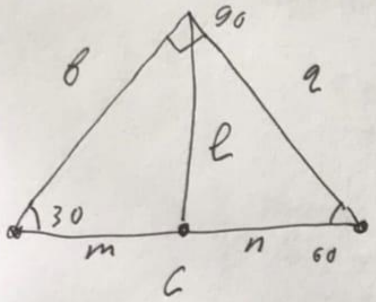
при этом $AL = AK = KC = 20$

биссектриса $= 20$

2) случай $\gamma = 3\beta \quad \alpha = 2\beta$

сумма углов $3\beta + 2\beta + \beta = 6\beta = 180$

$\beta = 30 \quad \gamma = 90 \quad \alpha = 60$



пусть стороны $a; b; c$ где $c - b = 20$

отрезки, на которые делит биссектриса основание $m; n$

тогда $c = 2a \quad b = \sqrt{3}\,a$

$c - b = 20 \qquad a(2-\sqrt{3}) = 20$

формула биссектрисы

$l = \sqrt{ab - mn}$

$m = \dfrac{bc}{a+b}$

$n = \dfrac{ac}{a+b}$

$a = 20(2+\sqrt{3}) =$

$= 40 + 20\sqrt{3}$

$c = 80 + 40\sqrt{3}$

$b = 40\sqrt{3} + 60$

$a^2 + b^2 = c^2$

$$l = \sqrt{ab - ab\frac{c^2}{(a+b)^2}} = \sqrt{ab\cdot\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{(a+b)^2}} =$$

$$= \frac{ab}{a+b}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} = 20\sqrt{6}\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 20\sqrt{6} + \frac{20\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} = 20\sqrt{6} + 10\sqrt{6}(\sqrt{3}-1) = 10\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$$

$$l = 10\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$$

Ответ: $l = 20$ или $10\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$

№4

$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$

Разделим уравнение в столбик на $(x+1)$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 & (x+1) \\
\underline{3x^3 + 3x^2} & 3x^2 + (3a+1)x + (2-a) \\
\quad (3a+1)x^2 + (2a+3)x & \\
\quad \underline{(3a+1)x^2 + (3a+1)x} & \\
\qquad (-a+2)x + (-a+2) & \\
\qquad \underline{(-a+2)x + (-a+2)} & \\
\qquad \qquad 0 &
\end{array}
$$

выражение поделилось без остатка $\Rightarrow$ $x = -1$ всегда корень

$3x^2 + (3a+1)x + (2-a) = 0$

$D = (3a+1)^2 - 12(2-a) = 9a^2 + 6a + 1 - 24 + 12a = 9a^2 + 18a - 23$

чтобы у такого квадратного уравнения был целый корень нужно, чтобы дискриминант был полным квадратом

$9a^2 + 18a - 23 = x^2$

будем перебирать значения a

1) $a = -6$ $\quad 9 \cdot 36 - 18 \cdot 6 - 23 = 216 - 23 = 193$ $\quad 193 \neq x^2 \Rightarrow$ целых корней нет
2) $a = -5$ $\quad 9 \cdot 25 - 18 \cdot 5 - 23 = 27 \cdot 5 - 23 = 122$ $\quad 122 \neq x^2$
3) $a = -4$ $\quad 9 \cdot 16 - 18 \cdot 4 - 23 = 18 \cdot 4 - 23 = 72 - 23 = 49 = 7^2$
4) $a = -3$ $\quad 9 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 23 = 81 - 54 - 23 = 81 - 77 = 4 = 2^2$
5) $a = -2$ $\quad 9 \cdot 4 - 36 - 23 = 36 - 36 - 23 = -23 < 0$

6) $a=-1$ $\quad 9-18-23=-32<0$

7) $a=0$ $\quad 0+0-23=-23<0$

8) $a=1$ $\quad 9+18-23=27-23=4=2^2$

9) $a=2$ $\quad 9\cdot4+18\cdot2-23=72-23=49=7^2$

10) $a=3$ $\quad 9\cdot9+18\cdot3-23=81+54-23=112\neq x^2$

11) $a=4$ $\quad 9\cdot16+18\cdot4-23=216-23=193\neq x^2$

12) $a=5$ $\quad 9\cdot25+18\cdot5-23=292\neq x^2$

итого возможны целые решения при $a=-4;-3;1;2$

1) $a=-4$

$$x=\frac{-3a-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{12-1\pm7}{6}=\frac{18}{6} \text{ или } \frac{2}{3}=3 \text{ или } \frac{2}{3}$$

итого 3 корня $-1;3;\frac{2}{3}$

2) $a=-3$ $\quad$ два целых все разные | подходит

$$x=\frac{+3\cdot3-1\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{8\pm2}{6}=1 \text{ или } \frac{5}{3}$$

итого 3 корня $-1;1;\frac{5}{3}$

3) $a=1$ $\quad$ подходит

$$x=\frac{-3-1\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-4\pm2}{6}=-1 \text{ или } -\frac{1}{3}$$

итого 2 корня $-1;-\frac{1}{3}$ $\quad$ не подходит

4) $a=2$

$$x=\frac{-6-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-7\pm7}{6}=0 \text{ или } -\frac{7}{3}$$

итого 3 корня $-1;0;-\frac{7}{3}$ подходит

№4 (продолжение)

итого ~~..~~ при различных корня из которых два целых есть при $a = -4; -3; 2$

3 варианта из 12

вероятность $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Ответ: 0,25

№5 пусть $f(x)$ количество слов из x букв в словаре

$f(1) = 1$ только слово A

$f(2) = 0$ AA не может быть

$f(3) = 1$ только ABA может быть

начало слова всегда AB

после этого два варианта

1) $AB\underbrace{A \ldots A}_{\text{слово из } x-2 \text{ букв таких } f(x-2)}$

2) $AB\underline{B}\underbrace{A \ldots A}_{\text{слово из } x-3 \text{ букв таких } f(x-3)}$

получается

$f(x) = f(x-2) + f(x-3)$

рассчитаем все значения до $f(21)$

$f(4) = f(1) + f(2) = 1$

$f(5) = f(2) + f(3) = 1$

$f(6) = f(3) + f(4) = 2$

$f(7) = f(4) + f(5) = 2$

$f(8) = f(5) + f(6) = 3$

$f(9) = f(6) + f(7) = 4$

$f(10) = f(7) + f(8) = 5$

$f(11) = f(8) + f(9) = 7$

$f(12) = f(9) + f(10) = 9$

$f(13) = f(10) + f(11) = 12$

$f(14) = f(11) + f(12) = 16$

$f(15) = f(12) + f(13) = 21$

$f(16) = f(13) + f(14) = 28$

$f(17) = f(14) + f(15) = 37$

$f(18) = f(15) + f(16) = 49$

$f(19) = f(16) + f(17) = 65$

$f(20) = f(17) + f(18) = 86$

$f(21) = f(18) + f(19) = 114$

значит слов из 21 буквы всего 114 вариантов

Ответ: 114 ~~вариа~~ слов