МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Попов Вадим Дмитриевич**

Технический балл: **85**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^{\circ})\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Вариант 4

№ 1.

Обозначим первый член прогрессии за a, множитель прогрессии за q. Тогда члены прогрессии есть $a, aq, aq^2, \ldots, aq^5$. По условию

$$\begin{cases} \dfrac{a(1+q+q^2+q^3)}{4} = 10 \quad (1) \\ \dfrac{a(q^2+q^3+q^4+q^5)}{4} = 90 \quad (2) \end{cases}$$

Разделим (2) на (1) $\Rightarrow$ получим $q^2 = \dfrac{90}{10} = 9 \Rightarrow q = \pm 3$.

Подставим найденное q, например, в (1) $\Rightarrow$ $a \cdot \dfrac{q^4-1}{4(q-1)} = 10 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a \cdot \dfrac{80}{8} = 10 \\ a \cdot \dfrac{80}{-16} = 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1,\ q = 3 \\ a = -2,\ q = -3 \end{array} \right.$$

Тогда последний член равен

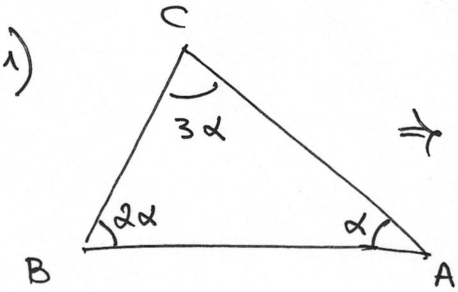
$$aq^5 = \left[\begin{array}{l} 243 \\ 486. \end{array} \right.$$

Ответ: либо 243, либо 486.

№3.

Возможны 2 случая:

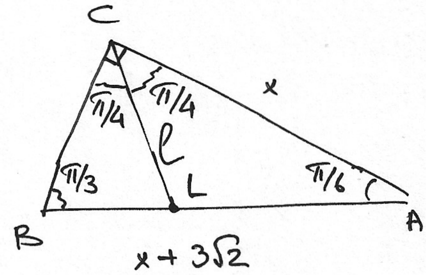
1)



$\Rightarrow 6\alpha = \pi \Rightarrow$

$\alpha = \pi/6 \Rightarrow$

$\triangle ABC$ – прямоугольный.



$\Downarrow$

$$\frac{x}{x+3\sqrt{2}} = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \Rightarrow$$

$$2x = \sqrt{3}x + 3\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$x(2-\sqrt{3}) = 3\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}} = 3\sqrt{6}(2+\sqrt{3})$$

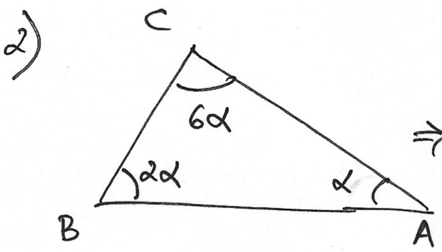
По теореме синусов в $\triangle ACL$ найдём l:

$$\frac{x}{\sin(105^\circ)} = \frac{l}{\sin(30^\circ)} = 2l.$$

$$\sin(105^\circ) = \cos(15^\circ) = \sqrt{\frac{1+\cos(30^\circ)}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow l = \frac{x}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}} = \underline{\underline{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

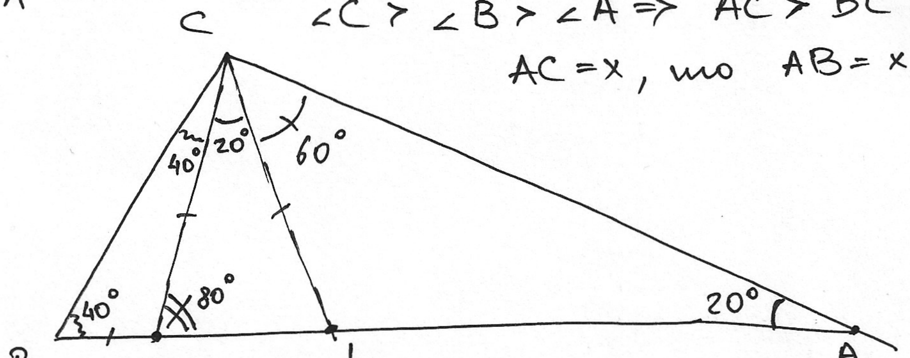
2)



$\Rightarrow 9\alpha = \pi \Rightarrow$

$\alpha = \pi/9 = 20^\circ. \Rightarrow \angle C = 120^\circ.$

$\angle C > \angle B > \angle A \Rightarrow$ AB, $AC > BC \Rightarrow$ если $AC = x$, то $AB = x + 3\sqrt{2}$.



Отметим на стороне AB такую точку X, что $AX = AC = x$. Тогда $BX = 3\sqrt{2}$. Заметим, что раз $\triangle AXC$ – равнобедренный, то $\angle AXC = 80^\circ = \angle XCA \Rightarrow$ $\angle BCX = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ \Rightarrow \triangle BXC$ – равнобедр. $(BX = CX)$. Далее, раз $\angle XCA = 80^\circ$, а $\angle LCA = 60^\circ$, то $\angle XCL = 20^\circ \Rightarrow \angle XLC = \angle LXC = 80^\circ \Rightarrow$ $CL = CX = BX = 3\sqrt{2}$. Ответ: либо $3\sqrt{6}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$, либо $3\sqrt{2}$.

№5.

Пусть каждую последовательность из произвольного ненулевого количества букв „Т", стоящих подряд, мы будем называть перегородкой. Из того условия, что слово начинается на „О" и заканчивается на „О", а также из того, что буквы „О" не могут соседствовать, следует, что количество перегородок (P) равно в точности $N_O - 1$, где N_O – количество букв „О". Также заметим, что $N_T \leq 2 \cdot P$, где N_T – кол-во букв „Т", иначе по принципу Дирихле какие-то 3 буквы „Т" содержатся в одной перегородке $\Rightarrow$ стоят подряд. Значит,

$N_T \leq 2 \cdot (N_O - 1) = 2 \cdot N_O - 2$. Также $N_T + N_O = 22 \Rightarrow$

$22 = N_T + N_O \leq (2N_O - 2) + N_O = 3N_O - 2 \Rightarrow N_O \geq 8$. С другой стороны, ясно, что ~~$N_O \leq N_T + 2$~~ $N_O \leq N_T + 1 \Rightarrow$

$22 = N_T + N_O \geq (N_O - 1) + N_O = 2N_O - 1 \Rightarrow N_O \leq \frac{23}{2} \Rightarrow N_O \leq 11$.

Значит, есть всего 4 случая: 1) $N_O = 11; N_T = 11$. 2) $N_O = 10; N_T = 12$ 3) $N_O = 9; N_T = 13$ 4) $N_O = 8; N_T = 14$.

Случай 1) Всего слов C_{10}^1 – кол-во способов выбрать ту перегородку, которая содержит 2 буквы „Т".

2) Всего слов C_9^3 – есть 3 перегородки с 2-мя буквами „Т".

3) Всего слов C_8^5 – есть 5 перегородок с 2-мя буквами „Т".

4) Всего $C_7^7 = 1$ слово – все перегородки содержат 2 буквы „Т". Итого $C_{10}^1 + C_9^3 + C_8^5 + C_7^7 = 10 + 84 + 56 + 1 =$

$= 151$.

Ответ: 151 слово.

$f(x)$ №4.

$\underbrace{3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-(a+1)}_{f(x)}=0$. Заметим, что при любом a $x=-1$ корень. Действительно,

$-3+3a+13-2a-9-a-1=0$ при $\forall a$.

Значит, по теор. Безу $f(x)=(x+1)\left(3x^2+(3a+10)x-(a+1)\right)$.

У уравнения(1): $3x^2+(3a+10)x-(a+1)=0$ должно быть 2 различных корня, не равных -1, при этом хотя бы один из них должен быть целым. Сразу отсеивается $a=-2$, т.к. $3\cdot(-1)^2+(3\cdot(-2)+10)(-1)-((-2)+1)=0$. -1 является корнем ур-я (1) только при $a=-2$, в чём легко убедиться, подставив $x=-1$. Корни ур-я (1) даются следующей формулой:

$$x_{1,2}=\frac{-(3a+10)\pm\sqrt{(3a+10)^2+12(a+1)}}{6}=\frac{-(3a+10)\pm\sqrt{9a^2+72a+112}}{6}$$

Подставим в неё все $a\in[-6;5]$, $a\in\mathbb{Z}$, $a\neq-2$:

$a=-6$: корни 1, $5/3$ → подходит. $\quad D=9a^2+72a+112$.

$a=-5$: корней нет, $D<0$.

$a=-4$: корней нет, $D<0$.

$a=-3$: корней нет, $D<0$.

$a=-1$: корни 0, $-\frac{7}{3}$ → подходит.

$a=0$: корни не целые → не подходит. $\left(\frac{-10\pm4\sqrt{7}}{6}\right)$

$a=1$: корни не целые → не подходит $\left(\frac{-13\pm\sqrt{193}}{6}\right)$

$a=2$: корни $\notin\mathbb{Z}$ $\left(\frac{-16\pm\sqrt{292}}{6}\right)$

$a=3$: корни $\notin\mathbb{Z}$ $\left(\frac{-19\pm\sqrt{409}}{6}\right)$

$a=4$: корни $\notin\mathbb{Z}$ $\left(\frac{-22\pm\sqrt{544}}{6}\right)$

$a=5$: корни $\notin\mathbb{Z}$ $\left(\frac{-25\pm\sqrt{697}}{6}\right)$

Значит, искомая вероятность равна $2/12=$

$=\boxed{1/6}$

№2.

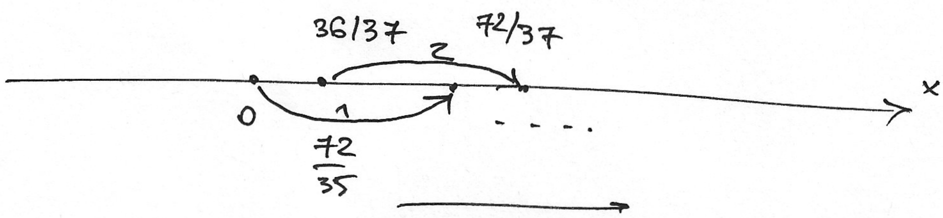
$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ) \qquad 5x^\circ = 5\cdot\frac{x}{360}\cdot 2\pi = \frac{\pi x}{36} \Rightarrow$$

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{36}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \dfrac{\pi x}{36} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \pi x = \pi - \dfrac{\pi x}{36} + 2\pi t,\ t\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{72}{35}k,\ k\in\mathbb{Z} & \text{Серия 1} \\ x = \dfrac{36}{37}(1+2t),\ t\in\mathbb{Z} & \text{Серия 2} \end{array}\right.$$

Нужно найти минимум выражения $\left|72\left(\frac{k}{35} - \frac{n}{37}\right) - \frac{36}{37}\right|$



35 раз по $72/35$ = 37 раз по $72/37$ ⇒

всё периодично.

Корни серии 1 сначала „стартуют левее на $36/37$", но потом „догоняют", т.к. шаг $\frac{72}{35} > \frac{72}{37}$ ⇒ min будет „посередине" при $k=17$, $n=18$.