



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Моисеев Дмитрий Александрович**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 13)x^2 - (2a - 9)x + a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква O и буква Γ . Все слова начинаются на букву O и заканчиваются тоже на букву O . В любом слове буква O не может соседствовать с другой буквой O . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы Γ . Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

используем
формулу №1

3 q-го члена; b_1 - первый член $b_n = b_1 q^{n-1}$ ~~бесконечная~~ прогрессия
 Тогда: $b_1; b_1 q; b_1 q^2; b_1 q^3; b_1 q^4; b_1 q^5$
 по условию

$$\begin{cases} \frac{b_1 + \dots + b_4}{4} = 20 \\ \frac{b_1 + \dots + b_5}{5} = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4} = 20 \\ \frac{b_1 q^2(1+q+q^2+q^3)}{4} = 180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^2 - 20 = 180 \quad (1) \\ b_1(1+q+q^2+q^3) = 20 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} q^2 = 9 \\ q = \pm 3 \end{cases}$$

$q = 3:$
 Тогда $b_1 = \frac{20 \cdot 4}{1+q+q^2+q^3} = \frac{80}{(1+q)(1+q^2)} = \frac{80}{4 \cdot 10} = 2$

$$\Rightarrow b_5 = b_1 q^4 = 2 \cdot 9^2 = \boxed{162}$$

$q = -3:$
 $b_1 = \frac{20 \cdot 4}{(1+q)(1+q^2)} = \frac{80}{-2 \cdot 10} = -\frac{40}{1} = -4$

$$b_5 = b_1 q^4 = -\frac{40}{1} \cdot 9^2 = \boxed{-324}$$

Ответ: 162 или ~~-324~~ -324

Итого
Пустовик
№2

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ);$$

Переведем в радианы: $\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{180^\circ}\right)$
 Перенесем все в левую и воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin x - 2 \cos\left(\frac{181\pi x}{360^\circ}\right) \sin\left(\frac{179\pi x}{360^\circ}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{181\pi x}{360^\circ}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{179\pi x}{360^\circ}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{181\pi x}{360} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{179\pi x}{360} = \pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{180}{181} + \frac{\pi \cdot 360}{181} \\ x = \frac{360}{179} n \end{cases} \quad \frac{360n}{179} = \frac{180}{181} + \frac{\pi \cdot 360}{181}$$

$$\Rightarrow x = \frac{t \cdot 180}{181 \cdot 179} \quad (*)$$

И.е. получается каковы найденные

т.е. рас-ные найм то при ум-нии
 по на возр-т (соста), то оно сост-ся каковы-ие

$$\begin{cases} \frac{180t}{179 \cdot 181} = \frac{180}{181} + \frac{360k}{181} \\ \frac{t \cdot 180}{179 \cdot 181} = \frac{360n}{179} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 179 + 358k \\ t = 362n \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1 = 179 + 358k_0$$

$$t_2 = 362n_0$$

$$|t_1 - t_2| = 0$$

Когда $|t_1 - t_2| = 0$

$$\Rightarrow 0 = 0, \quad |179 + 358k_0 - 362n_0| = 0$$

нечет чет чет чет

Числовое
Раз-^{числовое} ть нечетного и четного числа не может быть
 $0 \Rightarrow p \neq 0$

$$Zp=4 \quad Zp=1$$

$$|179 + 358K_0 - 362N_0| = 1 \quad (\text{р-ка с нулем})$$

$$179 + 358K_0 - 362N_0 = \emptyset$$

$$358K_0 - 362N_0 = -179$$

$$\begin{cases} K_0 = 316 \\ N_0 = 313 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 358 \cdot 316 - 362 \cdot 313 = -179 \quad (6.10)$$
$$113128 - 113307 = -179$$

$$\text{и } p=1 \Rightarrow x = \frac{180}{181 \cdot 179}$$

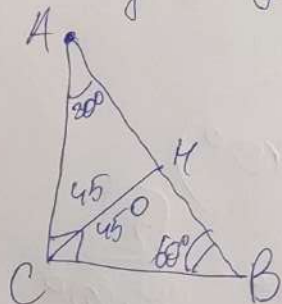
$$\text{Ответ: } x = \frac{180}{181 \cdot 179}$$

Условие
14
3X

и 3. Условие

① Угол $L; 2L; 3L$, т.е. третий в 3 раза больше L .

Когда $L + 2L + 3L = 180^\circ \Rightarrow 6L = 180^\circ: L = 30^\circ$



$$AB = a; \quad BC = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \quad 2L = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AC = \frac{a\sqrt{3}}{2} = a \cdot \sin 60^\circ \quad 3L = 90^\circ$$

по условию

$$a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$$

См = L (с-са 3-го угла) $L = \frac{2AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ}{AC + BC}$ по с-б-у с-м $\angle C$

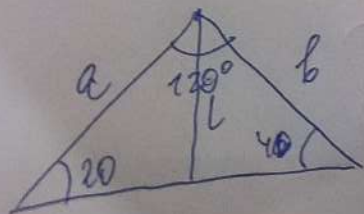
$$\Rightarrow L = \frac{2 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{(2-\sqrt{3}) \cdot 2(\sqrt{3}+1)} = \frac{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2(2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

по $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = \boxed{6+2\sqrt{3}}$

(a):

② Угол $L; 2L; 6L$, т.е. третий в 3 раза больше L
 Когда $L + 2L + 6L = 180^\circ; 9L = 180^\circ; L = 20^\circ; 2L = 40^\circ;$
 $6L = 120^\circ$



с-са;

$a; b$ -ст-ны т-ка. Большая ст-на лежит напротив большего угла $\Rightarrow a + 2\sqrt{2}$

По м. ^{формула} синусов

$$\frac{a+2\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 40^\circ} \quad \text{используя ф-лу синусов}$$

урав, получим

$$\sin 40^\circ (a+2\sqrt{2}) = a (3\sin 40^\circ - 4\sin^3 40^\circ)$$

$$a+2\sqrt{2} = 3a - 4a\sin^2 40^\circ$$

$$2a(1-\sin^2 40^\circ) = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{2\cos 80^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ}$$

По м. синусов

$$\frac{b}{\sin 20^\circ} = \frac{a}{\sin 40^\circ} \quad \text{используем ф-лу 2-го угла}$$

$$\Rightarrow b = \frac{a}{2\cos 20^\circ}$$

По ф-ле Д-сы:

$$l = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot a \cdot \frac{a}{2\cos 20^\circ}}{a + \frac{a}{2\cos 20^\circ}} =$$

$$= \frac{a}{2\cos^2 20^\circ + 1} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin 40^\circ (3-4\sin^2 40^\circ)} = \frac{\sqrt{2}}{3\sin 40^\circ - 4\sin^3 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

Ответ: 1-ый случай $6+2\sqrt{3}$
2-ой случай $2\sqrt{2}$

условия

$$3x^2 - (3a-13)x + a-1 =$$

$$= (x+1)(3x^2 + x(10-3a) + (a-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3x^2 + x(10-3a) + (a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3x^2 + x(10-3a) + (a-1) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$x = -1$ всегда корень
Рассмотрим

$$(1) \quad 3x^2 + x(10-3a) + (a-1) = 0$$

$$D = (10-3a)^2 - 4(a-1) \cdot 3 =$$

$$= 9a^2 - 60a + 100 - 12a + 12 = 9a^2 - 72a + 112$$

тогда $x_{1,2} = \frac{-(10-3a) \pm \sqrt{9a^2 - 72a + 112}}{6}$

$\Phi(a)$:

$$\Phi(-5) = 9 \cdot 5^2 - 72 \cdot 5 + 112 = 697$$

$$\Phi(-4) = 9 \cdot 4^2 - 72 \cdot 4 + 112 = 544$$

$$\Phi(-3) = 9 \cdot 3^2 - 72 \cdot 3 + 112 = 409$$

} не абс.
максимум
наб-о-е.

числовые
Рассмотрим первые 18 чисел.

①.

$$D(-2) = 36 + 72 + 112 = 220$$

$$D(-1) = 9 + 72 + 112 = 193$$

$$D(0) = 112 \text{ не является полным квадратом}$$

$$D(1) = 81 - 72 + 112 = 121 = 11^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{6} = \begin{cases} 0 \\ 2/3 \end{cases}$$

$$D(2) = 36 - 72 + 112 = 76 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 9}{6} = \begin{cases} 5/6 \\ -1/3 \end{cases}$$

$$D(3) = 81 - 216 + 112 = -23$$

$$D(4) = 144 - 288 + 112 = -32$$

$$D(5) = 225 - 360 + 112 = -23$$

$$D(6) = 324 - 432 + 112 = 4 = 2^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2}{6} = \begin{cases} 5/3 \\ -1 \end{cases}$$

при $a = 1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ ур-е не имеет решений}$$

при $a = 2$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases} \text{ не удовлетворяет т.к. будет совп-ти корень } x = -1.$$

при $a = 6$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases} \text{ удовлетворяет}$$

Итого $P(a) = \frac{2}{6+5+1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ответ $\frac{1}{6}$

Числовые
Рассмотрим первые 18 чисел.

Разделим их на 3 пар где могут быть

пары 01
 11
 10

(во невозможности по дил-ию)

Тогда:

$$\begin{array}{l} 01 \rightarrow 10 \\ \quad \rightarrow 01 \\ 11 \rightarrow 01 \\ \quad \rightarrow 11 \\ 10 \rightarrow 11 \\ \quad \rightarrow 00 \end{array}$$

Тогда если у нас есть $F_n(01)$ - все-го
воз-можных нахождение (ан-но для других)
для пары 01

$$F_n(01) = F_{n-1}(01) + F_{n-1}(11)$$

$$F_n(10) = F_{n-1}(01) + F_{n-1}(10)$$

$$F_n(11) = F_{n-1}(11) + F_{n-1}(10)$$

Получили рекур-ую зав-ть.

Составим таблицу частот

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
О	0	1	1	2	4	4	12	21	37
П	0	0	1	2	3	5	9	16	28
ГО	0	1	2	3	5	9	16	28	0

в начале стоит 0 (по условию)

т.е. тогда
будет 0
и будет ГО
это не-но.

тогда всего $37 + 28 = 65$.

Ответ: 65