



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Тихановский Дмитрий Александрович**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 4)x^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

④ Вариант 1

Обозначим последовательность как $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$; $\boxed{\frac{a_2}{a_1} = d}$

носл. имеет вид $a, da, d^2a, d^3a, d^4a, d^5a$

$$S_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = 15$$

$$S_2 = \frac{a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{4} = 60$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} = \frac{a_1 + da_1 + d^2a_1 + d^3a_1}{d^2a_1 + d^3a_1 + d^4a_1 + d^5a_1} = \frac{a_1(1+d+d^2+d^3)}{a_1(d^2+d^3+d^4+d^5)d^2} = \frac{1}{d^2}$$

$$d = \pm 2$$

$\Rightarrow d = -2$
носл. имеет вид

$$a_1; -2a_1; 4a_1; -8a_1; 16a_1; -32a_1$$

$$S_1 = \frac{a_1 - 2a_1 + 4a_1 - 8a_1}{4} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{-5a_1}{4} = 15$$

$$\Rightarrow a_1 = -12$$

$$S_2 = \frac{4a_1 - 8a_1 + 16a_1 - 32a_1}{4} = 60$$

$$\Rightarrow \frac{-20a_1}{4} = 60$$

$$a_1 = -12$$

т.к. если $d = -2$

$$a_1 = -12 \text{ все верно}$$

$$\text{то } a_6 = 32 \cdot (-12) = -384$$

этот орб. не подходит

$$\Rightarrow \text{орб. } (32; 384)$$

$$d = 2$$

носл. имеет вид

$$a_1; 2a_1; 4a_1; 8a_1; 16a_1; 32a_1$$

$$S_1 = \frac{a_1 + 2a_1 + 4a_1 + 8a_1}{4} = \frac{a_1}{4} (1 + 2 + 4 + 8) = 15$$

$$\frac{a_1}{4} (15) = 15 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$S_2 = \frac{4a_1 + 8a_1 + 16a_1 + 32a_1}{4} = \frac{a_1}{4} (4 + 8 + 16 + 32) = 60$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{4} = 60$$

$$a_1 = 1$$

т.к. если $d = 2, a_1 = 1$

$$\text{все верно, то } a_6 = 32$$

этот орб. подходит

$$\begin{array}{r} \sqrt{32} \\ 12 \\ \hline 64 \\ 32 \\ \hline 384 \end{array}$$

②

$$\sin(\pi x) = \sin\left(3x^\circ\right) (1) \quad x^\circ = x \frac{\pi}{180}$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi k_1 \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = 3x \frac{\pi}{180} + 2\pi k_1 \\ \pi x = \pi - 3x \frac{\pi}{180} + 2\pi k_2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{60} + 2k_1 \\ x = 1 - \frac{x}{60} + 2k_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{59x}{60} = 2k_1 \\ \frac{61x}{60} = 2k_2 + 1 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \frac{120}{59}$$

$$\begin{cases} x = \frac{120}{59} k_1 \\ x = \frac{120k_2 + 60}{61} \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \frac{120}{61}$$

$$\sin\left(\frac{120}{59} k_1 - \frac{120k_2 + 60}{61}\right) = ?$$

$$\left| \frac{120k_1}{59} - \frac{120k_2 + 60}{61} \right| = \left| \frac{61 \cdot 120k_1 - 59 \cdot 120k_2 - 60 \cdot 59}{59 \cdot 61} \right| =$$

$$= \left| \frac{120(61k_1 - 59k_2) - 60 \cdot 59}{59 \cdot 61} \right|$$

$$60 \cdot 59 = 3540$$

$$61k_1 - 59k_2 = 2k_1 + 59(k_1 - k_2)$$

$$\text{т.к. } 61k_1 - 59k_2 \in \mathbb{Z}$$

||

$$\Delta_1 = 3600 - 3540 = 60$$

$$\Delta_2 = 3600 - 3540 = 60$$

$$120 \cdot 30 = 3600$$

$$120 \cdot 29 = 3480$$

Не важно смотреть
справа или слева, а

если $61k_1 - 59k_2 > 30$

или $61k_1 - 59k_2 < 2950$

качество графики Δ_3 будет
 больше $\rightarrow$ если $K_1=15$; $K_2=15$.
 пример достигается

$$\Delta_3 = \left| \frac{60}{59.61} \right| = \frac{60}{59.61} = \frac{60}{3599}$$

$$Orb: \frac{60}{3599}$$

целое из $[-5; 6]$ найти вероятность
 того что 2 цел. корн.

$$3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a+2 = 0$$

$$(x+1)(3x^2 + (1-3a)x + 2+a) = 0$$

~~значит целый корень~~
 из Φ не извлекается
 $\rightarrow$ целого решения нет

$x = -1$ - всегда корень

$$x_{1,2} = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-18a-23}}{6}$$

$$9a^2-18a-23 \geq 0$$

Нужен еще целый корень $\neq -1$

$$a = -5 \Rightarrow \Phi = 292 \quad \times$$

$$a = -4 \Rightarrow \Phi = 193 \quad \times$$

$$a = -3 \Rightarrow \Phi = 112 \quad \times$$

$$a = -2 \Rightarrow \Phi = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 7}{6}$$

$$a = -1 \Rightarrow \Phi = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

$$a = 0 \Rightarrow \Phi = -23 \quad \phi$$

$$a = 1 \Rightarrow \Phi = -32 \quad \phi$$

$$a = 2 \Rightarrow \Phi = -23 \quad \phi$$

$$a = 3 \Rightarrow \Phi = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$a = 3 \Rightarrow \Phi = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow x_1 = 0 \\ & \rightarrow x_2 = -\frac{14}{6} \sim \text{не подходит} \\ & \rightarrow x_1 = -1 \sim \text{корень} \rightarrow \text{гребень} \\ & \rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \sim \text{не подходит} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow x_1 = 1 \\ & \rightarrow x_2 = \frac{10}{6} \sim \text{не подходит} \end{aligned}$$

$$a=4 \Rightarrow \Phi = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm 7}{6} \rightarrow x_1 = 3 - \text{логично} \rightarrow x_2 = \frac{4}{6}$$

$$a=5 \Rightarrow \Phi = 112$$

$$a=6 \Rightarrow \Phi = 193$$

$$\Rightarrow \text{вероятность } \frac{3}{12} = 25\%$$

(5)

3 буквы $\rightarrow$ АБА

S_n - кол-во слов из n букв.

4 буквы $\rightarrow$ АББА

5 букв $\rightarrow$ АБАБА

6 букв $\rightarrow$ АБАББА или АББАБА

АБ $\swarrow$ $\searrow$ БА
16 букв

АББАБА $\rightarrow 17$

АБАБА $\rightarrow 16$

есть 2 варианта

если в начале ББА

если в конце АБА

тогда до ББА идет А

тогда от 1-ой до $(n-2)$ буквы

от 1-ой до $(n-3)$ букв - это слово из $(n-3)$ букв

это слово из $(n-2)$ букв

$$S_{20} = S_{18} + S_{17}$$

$$S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$$

$$S_3 = 1$$

$$S_4 = 1$$

$$S_5 = 1$$

$$S_6 = 2$$

$$S_7 = S_4 + S_5 = 2 \quad S_8 = S_6 + S_7 = 4$$

$$S_9 = S_5 + S_6 = 3 \quad S_{10} = S_8 + S_9 = 7$$

$$S_{11} = S_9 + S_{10} = 12 \quad S_{12} = S_{10} + S_{11} = 19$$

$$S_{13} = S_{11} + S_{12} = 31 \quad S_{14} = S_{12} + S_{13} = 50$$

$$S_{15} = S_{13} + S_{14} = 81 \quad S_{16} = S_{14} + S_{15} = 131$$

$$S_{17} = S_{15} + S_{16} = 212 \quad S_{18} = S_{16} + S_{17} = 343$$

$$S_{19} = S_{17} + S_{18} = 555 \quad S_{20} = S_{18} + S_{19} = 898$$

Q. bet: 86

③

Обозначим меньший угол 2α , тогда есть угол 2α , т.к. если его нет, то либо угол α больше какого-то в 3 раза, что неверно, т.к. он наименьший, либо он больше какого-то в 2 раза, что неверно, т.к. он наименьший. $\Rightarrow$ либо есть угол 3α , либо 6α

I вариант

углы: α ; 2α ; 3α

II вариант

углы: α ; 2α ; 6α

наиб. сторона

т.к. напротив
большой стороны
стоит
углы



вторая по величине
сторона

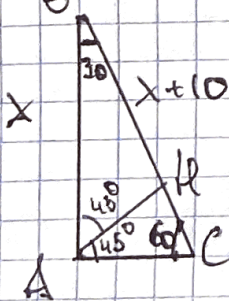
наиб. сторона

$$\begin{aligned} 3\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 20^\circ \\ 2\alpha &= 40^\circ \\ 6\alpha &= 120^\circ \end{aligned}$$

вторая по величине
сторона

$$6\alpha = 180^\circ$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 30^\circ \\ 2\alpha &= 60^\circ \\ 3\alpha &= 90^\circ \end{aligned} \quad \Delta \text{ прямоугольный}$$



т.к. $\angle ABC = 30^\circ$ в прямоугол. Δ .

$$AC = \frac{x}{2} + 5 = \frac{CB}{2}$$

из т. Пифагора $\Rightarrow x^2 + \frac{x^2}{4} + 5x + 25 = x^2 + 20x + 100$

I вариант

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + 5x + 25 = x^2 + 3x + 100$$

$$\frac{x^2}{4} - 15x - 75 = 0$$

$$x^2 - 60x - 300 = 0$$

$$D = 3600 + 1200 = 4800 = (40\sqrt{3})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{60 \pm 40\sqrt{3}}{2}$$

$$т.к. x > 0$$

$$x = \frac{60 + 40\sqrt{3}}{2} = 30 + 20\sqrt{3}$$

Ан — дуга — ца: $\rightarrow$ угл Алл ~~нах. хугацаа~~

$$\frac{\frac{x}{2} + 5}{\sin 75^\circ} = \frac{AH}{\sin 60^\circ}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$AH = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} (15 + 10\sqrt{2} + 5) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot (20 + 10\sqrt{2})}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{40\sqrt{3} + 20\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

$$Orb: N_1 = \frac{40\sqrt{3} + 20\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

Вопрос 11

The r. c. cable $\triangle ABC$
 $\angle = 40^\circ$

$$\frac{A}{x+10} = \frac{\sin 42^\circ}{\sin 32^\circ} = \frac{1}{3 - 4\sin^2 2^\circ}$$

$$T.K \ 40 > 30$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \sin \alpha > \frac{1}{2}$$

$$X = \frac{20 \sin 40}{\sqrt{3} - 2 \sin 40}$$

$p = 40 \text{ e } 60$
 $\Downarrow$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin 40^\circ \cos 60^\circ + \\ &+ \cos 40^\circ \sin 60^\circ = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ$$

$$\begin{aligned}\sin 4\theta &= 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \\ \cos 4\theta &= \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{10 \sin 20}{(\sqrt{3} - 2 \sin 40) \cos 40} = \frac{10 \sin 20}{4 \sin 40 \cos 40 \cos 80} =$$

$$= \frac{10}{4} \frac{\sin 160^\circ}{\sin 40^\circ \cos 80^\circ \cos 40^\circ} = 10$$

$$\text{Q. 10: } \frac{40\sqrt{3} + 20\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

