МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шаронов Дмитрий Александрович**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x)=\sin(2x^{\circ})\,?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3+(3a+4)x^2+(2a+3)x-a+2=0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты AB2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

N1

Геом прог: $b; bq; bq^2; bq^3; bq^4; bq^5$

Из усл: ① $\begin{cases} \frac{b+bq+bq^2+bq^3}{4}=30 \\ \frac{bq^2+bq^3+bq^4+bq^5}{4}=120 \end{cases}$ ②

②:①: $\boxed{q^2=4}$

①: $b(1+q+q^2+q^3)=120$

$b(1+q)(1+q^2)=120$

$b(1+q)\cdot 5=120$

$b=\frac{24}{1+q}=8$ или -24
$(q=2)$ $(q=-2)$

$\boxed{\text{Ответ: } 64 \text{ или } 192}$

4-й член $-x=bq^3$

$\left.\begin{array}{l} x=8\cdot 2\cdot 4 \\ \text{или} \\ x=-24\cdot(-2)\cdot 4 \end{array}\right\} x=64 \text{ или } 192$

Последовательности возм:

$8; 8\cdot 2; 8\cdot 2^2; 8\cdot 2^3; 8\cdot 2^4; 8\cdot 2^5$

или

$-24; 24\cdot 2; -24\cdot 2^2; 24\cdot 2^3; -24\cdot 2^4; 24\cdot 2^5$

N2

$\alpha^0=\frac{\pi}{180}\alpha^{rad}$

$\sin(\pi x)=\sin(2x^0)$

$\sin(\pi x)=\sin\left(\frac{\pi x}{90}\right)$

$2\sin\frac{\pi x-\frac{\pi}{90}x}{2}\cos\frac{\pi x+\frac{\pi}{90}x}{2}=0$

$\sin\frac{89\pi x}{180}\cos\frac{91\pi x}{180}=0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{89\pi x_1}{180}=\pi a; a\in\mathbb{Z} \\ \frac{91\pi x_2}{180}=\frac{\pi}{2}+\pi b; b\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{180}{89}\pi a \\ x_2=\frac{90}{91}\pi+\frac{180}{91}\pi b \end{array}\right.$

расст. между корнями в сериях 1 и 2 равны соотв. $\frac{180}{89}\pi$ и $\frac{180}{91}\pi$

Посмотрим на расст. между корнями разных серий

$S=|x_1-x_2|, x_1\neq x_2$

$S=\left|\frac{90}{91}\pi+\frac{180\pi b}{91}-\frac{180}{89}\pi a\right|=\frac{90\pi}{89\cdot 91}|89+178b-182a|$

$S = \frac{90\pi}{89\cdot 91}\,|89+178b-182a|$

$t = 89+178b-182a$

Если $t=0$, то корни совпадают, это не то

т.к. $t = \sum n \in \mathbb{Z}$, то $t \in \mathbb{Z}$

Пусть $t = \pm 1$

$89+178b-182a = \pm 1$

$178b-182a = -90$ или -88

$89b-91a = -45$ или -44

НОД$(89;91) = 1$ (89 − прост, $91 \not\vdots\, 89$)

Получается есть решения для обоих уравнений

Значит $t_{min} = \pm 1 \Rightarrow S_{min} = \frac{90\pi}{89\cdot 91}|t_{min}| = \frac{90\pi}{89\cdot 91} < \frac{180}{89}\pi$ и $\frac{180}{91}\pi$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{90\pi}{89\cdot 91}}$

№3

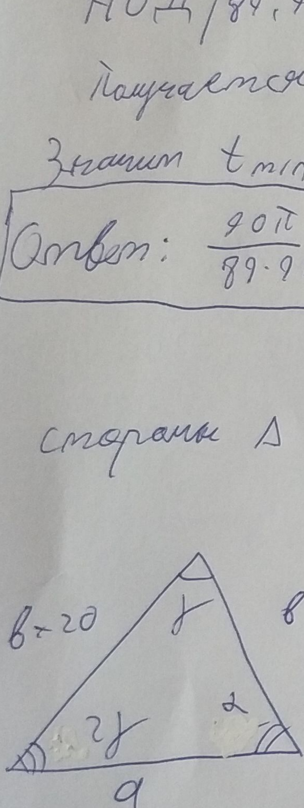
стороны Δ: $b+20 > b > 20$

третий угол самый большой, т.к. равен $3\cdot\alpha_{min}$ или $3\cdot 2\cdot\alpha_{min} \geq \alpha_{min}$ и $2\alpha_{min}$

получается он против большей стороны $(b+20)$,

самый маленький против меньшей (a),

и остальной против средней

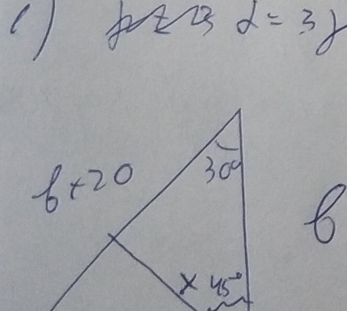


$\alpha = 3\gamma$ или 6γ ; длина бисс. $= x$

1) пусть $\alpha = 3\gamma$

$\gamma + 2\gamma + 3\gamma = 180 \Rightarrow \gamma = 30°$

получается прямоуг. Δ



$b = (b+20)\cos 30° = (b+20)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{b = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

в Δ с ∠ = 30° и 45°:

т. sin: $\frac{b}{\sin(30+45)} = \frac{x}{\sin 30}$

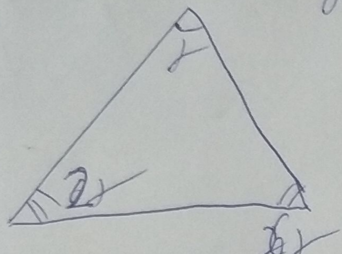
$x = \frac{b\sin 30}{\sin(30+45)} = \frac{b\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{6}}{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

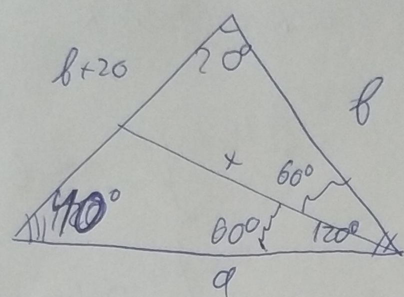
$x = \frac{20\sqrt{6}(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{1\cdot 2} = 10\sqrt{6}(2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}) = 10\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$

$\boxed{x = 10\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$

2) $\alpha = 6\gamma$

$\gamma + 2\gamma + 6\gamma = 180;\ \gamma = 20$





Аналогично п. 1)

$\frac{b+20}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}$ (т. sin для больш. Δ)

$\boxed{b = \frac{20\sin 40}{\sin 120 - \sin 40}}$

$\frac{x}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin(20^\circ + 60^\circ)}$

$x = \frac{b\sin 20}{\sin 80} = \frac{20\sin 20\sin 40}{\sin 80(\sin 120 - \sin 40)} = \frac{20\sin 20\sin 40}{\sin 80 \cdot 2\sin 40\cos 80} = \frac{20\sin 20}{\sin 160} = 20$

$\boxed{x = 20}$

Ответ: 20см $10\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$

N5

Возьмем последовательность длины k

$\underbrace{ABABABAB\ldots ABA}_{k \text{ символов}}$

Если n букв B удвоить, то получится слово, а если n+k=21, то слово длины 21. Таким методом можно получить все слова длины 21

~~Пусть длина слова l и в нем n раз встретилась группа BB тогда k = l − n; больше каждых букв B или групп BB в этом слове x, тогда x = k−1~~

Слово, где нет повторений B (..BB.. не встречается) буду называть исходным.

Рассмотрим все слова длины $l = 21$, длина исходного слова $l_0 = l - n$, где n кол-во групп BB

k - кол-во букв B в исходном слове

$k = \frac{l_0 - 1}{2} = \frac{l - n - 1}{2} = 10 - \frac{n}{2}$

$k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq n$ (~~нельзя удвоить букву B~~ нельзя получить групп BB больше, чем k)

$\begin{cases} \frac{l-n-1}{2} \geq n \\ \frac{l-n-1}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} n \leq \frac{21-1}{3} = 6\frac{2}{3} \\ \frac{20-n}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} n \leq 6 \\ n \vdots 2 \end{cases}$

исх. слово

ABABAB...ABA - в нем без учета порядка выбираем n букв B и добавляем к ним пару, это можно сделать C_k^n способами

Всего слов длины 21 $X = \sum\limits_n C_k^n$ для всех возм n

$n \leq 6$ и $n \vdots 2 \Rightarrow n = 0; 2; 4; 6$

$k = 10; 9; 8; 7$

$X = C_{10}^0 + C_9^2 + C_8^4 + C_7^6 = 1 + \frac{9 \cdot 8}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 7 = 8 + 36 + 70 = 114$

$\boxed{\text{Ответ: } 114}$

№4

$f(x)=3x^3+(3a+4)x^2+(2a+3)x-a+2=0$

$f(x)=3x^3+\alpha x^2+\beta x+3tx^2+\alpha t x+\beta t=0$

$f(x)=3x^3+(\alpha+3t)x^2+(\beta+\alpha t)x+\beta t=0$

$$\begin{cases}\alpha+3t=3a+4 \\ \alpha t+\beta=2a+3 \\ \beta t=-a+2\end{cases}\qquad \begin{aligned}&\alpha=3a+4-3t \\ &\beta=2a+3-\alpha t=2a+3-3at-4t+3t^2 \\ &\beta=3t^2-(4+3a)t+2a+3\end{aligned}$$

$0=\beta t+a-2=3t^3-(4+3a)t^2+(2a+3)t+a-2$

$t=-x_0$ — корень (x_0 корень $f(x)=0$)

$f(x)=x(3x^2+\alpha x+\beta)+t(3x^2+\alpha x+\beta)=0$

$f(x)=(x+t)(3x^2+\alpha x+\beta)$

$(x-x_0)(3x^2+(3a+4+3x_0)x+3x_0^2+(4+3a)x_0+2a+3)=0$

$D=(3a+4+3x_0)^2-12x_0^2-4(4+3a)x_0-4(2a+3)$

$D=9x_0^2+6x_0(3a+4)+(3a+4)^2-12x_0^2-4(4+3a)x_0-4(2a+3)$

$D=-3x_0^2+2x_0(3a+4)+(9a^2+24a+16-8a-12)$

$D=-3x_0^2+2x_0(3a+4)+(9a^2+16a+4)=n^2$ (т.к. min 1 из корней второй скобки целый, т.к. целых корня ≥ 2)

$3x_0^2-2x_0(3a+4)-(9a^2+16a+4)+n^2=0$

$D=4(3a+4)^2+12(9a^2+16a+4)-4n^2 \in \mathbb{Z}$ (Пусть $x_0\in\mathbb{Z}$)

$108a^2+192a+48+36a^2+96a+64-4n^2\in\mathbb{Z}$

$144a^2+288a-112\in\mathbb{Z}$

~~$72a^2+96a-16=b$~~

$144a^2+288a-112=b$

$72a^2+96a-16-b=0$

$D=96^2+4\cdot16\cdot72+4\cdot72\cdot b=c^2$

$b=\frac{c^2}{4\cdot72}-\frac{96^2}{4\cdot72}-16$

$$b = \frac{c^2}{4\cdot 72} - \frac{96^2}{4\cdot 72} - 16$$

$$b = \frac{c^2}{4\cdot 72} - \frac{48^2}{72} - 16 = \frac{c^2}{4\cdot 72} - \frac{8^2}{2} - 16 = \frac{c^2}{4\cdot 72} - 48$$

$$c = c^2 : (4\cdot 72)$$

$$\frac{c^2}{4\cdot 72} \in \mathbb{Z}; \quad \frac{c^2}{2^2\cdot 2^3\cdot 3^2} \in \mathbb{Z}; \quad \frac{c^2}{2^5\cdot 3^2} \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{c^2 = c_0^2 \cdot 2^6\cdot 3^2} = c_0^2 \cdot 24^2 = 576 c_0^2$$

$$a = \frac{-96 \pm c^2}{2\cdot 72}$$

$$a = \frac{-96 \pm 24 c_0}{2\cdot 72} = \boxed{\frac{-4 \pm c_0}{6} = a}$$

$$\frac{-4 \pm n}{6} = a \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 6a + 4$$

$$D = 288^2 + 4\cdot 144\cdot 112 + 4\cdot 144\, b = c^2$$

$$c = c_0 \cdot 2\cdot 12$$

$$a = \frac{-288 \pm 2\cdot 12\, c_0}{288}$$