



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Коньков Дмитрий Алексеевич**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 17$.
Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.
2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 5. Высота, проведённая к гипотенузе, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 9. Найдите длину второго отрезка.
3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,58) = \cos(\pi x).$$

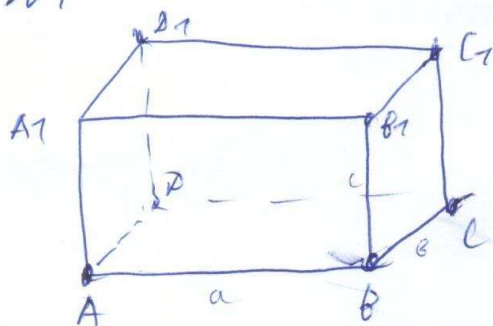
4. Сумма длин двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите длину третьего ребра, если известно, что она на 1 меньше длины диагонали этого параллелепипеда.
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 10x - 24$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

14



Решение:

1) Так как $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то $BB_1 \perp (ABC)$, $\angle DAB = 90^\circ$. Тогда в $\triangle DAB$ $DB^2 = AD^2 + AB^2$.
 $DB^2 = a^2 + b^2$.

$(BB_1 \perp (ABC), DB \subset (ABC)) \Rightarrow BB_1 \perp DB$. Тогда в $\triangle DBB_1$ $\angle DBB_1 = 90^\circ$. Тогда $DB_1^2 = DB^2 + BB_1^2$.

$$DB_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$(c + 1)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$2c + 1 = a^2 + b^2$$

$$1 = a^2 - 2c + b^2, \text{ так как } a \cdot b = c, \text{ то}$$

$$1 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = 1. \text{ Будем для определенности } a > b.$$

$$a = b + 1$$

$$2) a + b = 2020.$$

$$2b = 2019$$

$$b = \frac{2019}{2}$$

$$a = \frac{2021}{2}$$

$$c = a \cdot b = \frac{2019 \cdot 2021}{4} = \frac{2020^2 - 1}{4} = \frac{4080400 - 1}{4} = 1020099,75.$$

Ответ: 1020099,75.

Дано:

$ABCD A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

$$AB = a, BC = b, BB_1 = c$$

$$a + b = 2020$$

$$a \cdot b = c$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$c^2 = c + 1$$

$$c^2 - c = 1$$

при $n \geq 0$ $k \geq 2,58 + \frac{\pi}{2} > 0$.

при $n = -1$ $k = 2,58 - \frac{3\pi}{2} < 0$.

при $n \leq -2$ $k \leq 2,58 - \frac{3\pi}{2} - 2\pi < 2,58 - \frac{7\pi}{2}$, $\pi^2 + 4k \leq \pi^2 - 7\pi + 10,32 < 0$.
 m.k. $\pi^2 + 10,32 \leq 26,32$
 $-7\pi < -42$

при $n = -1$ $\pi^2 + 4k = \pi^2 + 4(2,58 - \frac{3\pi}{2}) = \pi^2 - 6\pi + 9 + 1,32 = (\pi - 3)^2 + 1,32 > 0$.

Значит, наименьший ^{положительный} корень (2) уравнения будет $x = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$ — это

$$x = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$$

если $x = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$, то $\pi^2 + 4k \geq 0$. и $\pi^2 + 4k$ — ~~не~~ положительное.

при $n \leq -2$ $\pi^2 + 4k < 0$.

при $n = -1$ $\pi^2 + 4k = (\pi - 3)^2 + 1,32 > 0$.

при $n \geq 0$ $\pi^2 + 4k \geq (\pi - 3)^2 + 1,32 + 8\pi > (\pi - 3)^2 + 1,32$

Значит, наименьший ^{положительный} корень (2) уравнения будет $x = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$ — это

$x = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$ Так как $\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2} < \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$, то

осталось сравнить наименьшие положительные корни (1) и (2) уравнения.

$$\frac{\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32} - \pi}{2} \quad \vee \quad \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$$

$$\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32} + \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32} \quad \vee \quad 2\pi$$

$$\pi^2 + 2\pi + 10,32 + \pi^2 - 6\pi + 10,32 + 2\sqrt{(\pi^2 + 2\pi + 10,32)(\pi^2 - 6\pi + 10,32)} \quad \vee \quad 4\pi^2$$

$$20,64 - 4\pi - 2\pi^2 + 2\sqrt{2\pi^2 + 4\pi + 20,64}$$

$$2\sqrt{(\pi^2 + 2\pi + 10,32)(\pi^2 - 6\pi + 10,32)} \quad \vee \quad 2\pi^2 + 4\pi + 20,64$$

$$(\pi^2 + 2\pi + 10,32)(\pi^2 - 6\pi + 10,32) \quad \vee \quad (\pi^2 + 2\pi + 10,32)^2$$

$$\pi^2 - 6\pi + 10,32 \quad \vee \quad \pi^2 + 2\pi + 10,32$$

$$0 \vee 8\pi$$

$$0 < 8\pi, \text{ значит, } \frac{\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32} - \pi}{2} < \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32} - \pi}{2}$

N 3.

$$\sin(x^2 - 2,58) = \cos(\pi x)$$

$$\sin(x^2 - 2,58) - \sin(\frac{\pi}{2} - \pi x) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{x^2 - 2,58 - \frac{\pi}{2} + \pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{x^2 - 2,58 + \frac{\pi}{2} - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x^2 + \pi x - 2,58 - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{x^2 - \pi x - 2,58 + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \pi x - 2,58 - \frac{\pi}{2} = 2\pi n \\ x^2 - \pi x - 2,58 + \frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \pi x - 2,58 - \frac{\pi}{2} - 2\pi n = 0 & (1) \\ x^2 - \pi x - 2,58 + \frac{\pi}{2} - 2\pi n = 0 & (2), n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решим $2,58 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n = k$.

(1) $x^2 + \pi x - k = 0$

$$D = \pi^2 - 4(-k) = \pi^2 + 4k.$$

$$x = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4k}}{2}$$

Получим как минимум один действительный корень, т.к.

$$x = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4k} - \pi}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\pi^2 + 4k} > \pi$$

$$\pi^2 + 4k > \pi^2$$

$$k > 0. \quad \text{при } n \geq 1 \quad k \geq 2,58 + \frac{\pi}{2} + 2\pi > 2,58 + \frac{\pi}{2}.$$

при $n \leq -1 \quad k \leq 2,58 + \frac{\pi}{2} - 2\pi = 2,58 - \frac{3}{2}\pi < 0.$

при $n = 0 \quad k = 2,58 + \frac{\pi}{2} > 0.$ Значит, действительный корень (1) уравнения - это $x = \frac{\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32} - \pi}{2}$.

(2) $x^2 - \pi x - k = 0.$

$$D = \pi^2 + 4k.$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4k}}{2}$$

если $x = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 + 4k}}{2}$, то $\pi > \sqrt{\pi^2 + 4k}$ и $\pi^2 + 4k < \pi^2$ - невозможное

$$\pi^2 > \pi^2 + 4k \geq 0.$$

$$\begin{cases} k < 0 \\ \pi^2 + 4k \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=16 \\ 9x^2+206x+1225=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad 9x^2+206x+1225=0$$

$$D = 42436 - 44100 = -1664 < 0, \text{ значит, уравнение (2) корней не имеет}$$

$$x=16.$$

Ответ: 16.

№ 7.

$\{b_i\}$ — ^{возрастающая} арифметическая прогрессия. Пусть d — разность этой арифметической прогрессии. $b_n = b_1 + d(n-1)$

$$b_{b_2} = b_1 + d(b_2 - 1)$$

$$b_{b_2} = b_1 + d(b_1 + d - 1)$$

$$17 = 1 + d(1 + d - 1)$$

$$16 = d^2$$

$d = \pm 4$. Так как $\{b_i\}$ — возрастающая, то $d > 0$.

$$d = 4.$$

$$b_{b_3} = b_1 + d(b_3 - 1)$$

$$b_{b_3} = b_1 + d(b_1 + 2d - 1)$$

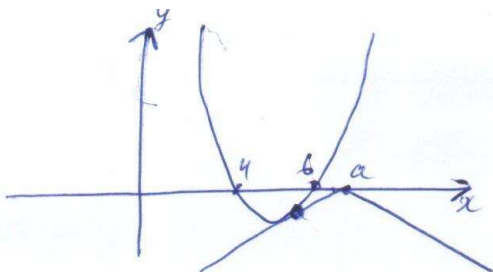
$$b_{b_3} = 1 + 4(1 + 8 - 1) = 33.$$

~~Ответ: 33~~, $b_{b_{b_3}} = b_{33} = b_1$

$$b_{b_{b_3}} = b_1 + d \cdot 32$$

$$b_{b_{b_3}} = 1 + 4 \cdot 32 = 129$$

Ответ: 129.



Range

$$x^2 - ax + a^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x^2 - (10+a)x + a^2 + 24 = 0$$

$$D = 100 + 20a + a^2 - 4a^2 - 96 = 4 + 20a - 3a^2$$

$$D \geq 0 \Rightarrow 4 + 20a - 3a^2 = 0$$

$$D = 400 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot (100 + 12) = 4 \cdot 112 = 448$$

$$\sqrt{D} = 4 \cdot 2\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$$

$$a = \frac{-20 \pm 8\sqrt{7}}{-6}$$

$$a = \frac{10 \pm 4\sqrt{7}}{3}$$

Так как $a = \frac{10 - 4\sqrt{7}}{3} < 0$, то ~~нет~~

$$a = \frac{10 + 4\sqrt{7}}{3}$$

Тогда при $2 + \frac{4\sqrt{5}}{5} < a < \frac{10 + 4\sqrt{7}}{3}$ — 2 корня. (Так как при $a = 5$ уравнение имеет воступ три корня, а значит пересекает ось Ox в 2 точках).

при $a = \frac{10 + 4\sqrt{7}}{3}$ — 1 корень.

при $a \geq \frac{10 + 4\sqrt{7}}{3}$ — 0 корней.

Ответ: ~~при $a \leq 0$ — 2 корня~~

~~при $a < 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 2 корня~~

~~при $a = 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 1 корень~~

~~при $2 - \frac{4\sqrt{5}}{5} < a < 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 2 корня~~

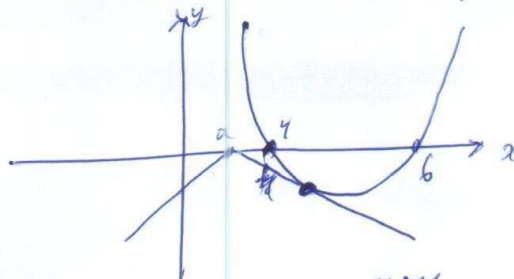
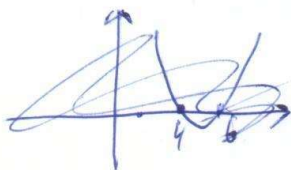
при $a = 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 1 корень

при $2 + \frac{4\sqrt{5}}{5} < a < \frac{10 + 4\sqrt{7}}{3}$ — 2 корня

при $a = \frac{10 + 4\sqrt{7}}{3}$ — 1 корень.

если $a > 0$ угол может пересекать параболу в 2 точках, касаться её, и не иметь с ней общих точек. ~~То есть угол~~
~~касается параболы при $a = a_1$ и $a = a_2$, $a_1 < a_2$. Тогда при~~
 ~~$0 < a < a_1$ — один корень~~

Рассмотрим случай, когда угол касается параболы, $a < 4$.



Тогда уравнение (1) имеет ^{или} равно 1 корень, ~~или~~ больше a ,
 $x > a$.

$$(1) \quad x^2 + ax - a^2 - 10x + 24 = 0.$$

$$x^2 + (a-10)x + 24 - a^2 = 0.$$

$$D = a^2 - 20a + 100 - 96 + 4a^2 = 5a^2 - 20a + 4.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 20a + 4 = 0.$$

$$D = 400 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 400 - 80 = 320$$

$$\sqrt{D} = 8\sqrt{5}.$$

$$a = \frac{20 \pm 8\sqrt{5}}{10}$$

$$a = 2 \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

при a очень близком к 0 угол получается почти развёрнутым,
 значит пересекает параболу по 2 точкам.

Тогда при $0 < a < 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 2 корня у (1) уравнения

или $a = 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 1 корень

или $2 - \frac{4\sqrt{5}}{5} < a < 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — нет корней

или $a = 2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$ — 1 корень.

Теперь рассмотрим случай, когда угол касается параболы, и $a > 6$.

Тогда (1) имеет ^{или} равно 1 корень, ~~или~~ меньше a .

25.

$$x^2 + a|x-a| = 10x - 24 \quad (1)$$

$$x^2 - 10x + 24 = -a|x-a|$$

$$f(x) = x^2 - 10x + 24$$

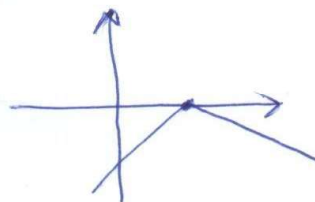
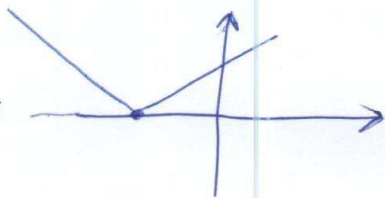
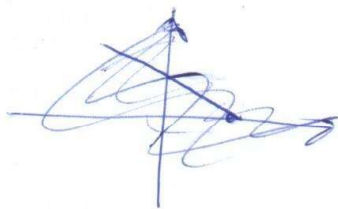
$$f(x) = (x-6)(x-4)$$

$y = f(x)$ — квадратичная функция. $x_0 = \frac{-10}{2} = -5$.

график — парабола. $y_0 = -7$.

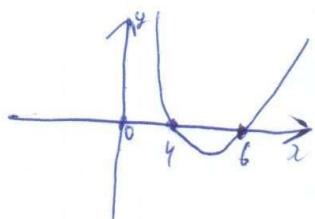
$y = |x-a|$ — график — ^{состоит} из двух лучей, симметричных относительно ^{горизонтальной} прямой $y = x$ и $y = -x$. с вершиной в точке $(a; 0)$.

$y = -a|x-a|$ — график — ^{состоит} из двух лучей, симметричных относительно ^{горизонтальной} прямой $y = x = a$ с вершиной в точке $(a; 0)$.

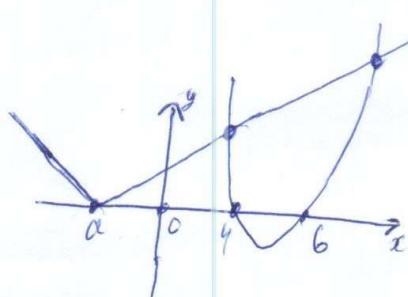


если $a = 0$, то $y = -a|x-a|$ — прямая $y = 0$.

Тогда при $a \neq 0$ этот угол пересекает каждую из ветвей параболы ровно 1 раз, значит всего 2 корня у уравнения (1).
При $a = 0$ прямая $y = 0$ пересекает параболу в 2 точках — $(4; 0)$ и $(6; 0)$.



$a = 0$



$a < 0$