МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бикмухаметов Глеб Айратович**

Технический балл: **80**

Дата: **16 февраля 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 2-1

1. Дан квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Может ли его дискриминант быть равен: а) 2019; б) 2020?

2. Велотрек имеет форму окружности. Из его диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста, которые двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями. Сколько полных кругов проедет каждый велосипедист до того момента как они поравняются первый раз после старта, если отношение их скоростей равно $\frac{32}{31}$.

3. Для каждого a решите уравнение $(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$.

4. Решите систему

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} y + |\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - 3 \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y| = 0, \\ \sqrt{3 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y - 5 = 0. \end{cases}$$

5. Рассматриваются все треугольники, для которых существует такое действительное число a, что произведение трех высот треугольника равно величине $7 + 2a - a^2$. Найдите наибольший возможный радиус вписанной в такой треугольник окружности.

февраль-март 2020 г.

Шифр

№1 Черновик

$b^2-4ac=2019$

$b=\sqrt{2019+4ac}$

% 4

$\times\begin{array}{r}41\\41\\\hline 41\\164\\\hline 1681\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}2019\\1681\\\hline 7\end{array}$

2019%4 == 3

2020%4 == 0

1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	1

$b^2-4ac=2020$

$-\begin{array}{r}2020\\1764\\\hline 256\end{array}$

$\times\begin{array}{r}42\\42\\\hline 84\\168\\\hline 1764\end{array}$

$b=16$

$a=1$

~~...~~42

$c=-441$

$1764 : 4 = 441$

$\times\begin{array}{r}441\\4\\\hline 1764\end{array}$ $\quad +\begin{array}{r}1764\\256\\\hline 2020\end{array}$

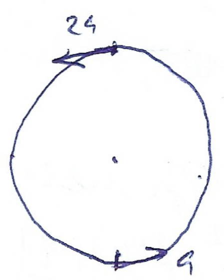
r^2

$R^2=(r+1)^2=r^2+2r+1$

vt

$2vt=vt+1$

$vt=1$

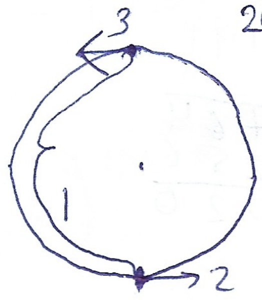


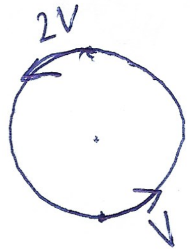
~~2a+1~~

$\frac{1}{2a}$ $\quad \frac{1}{a}$

$2a\cdot t=a\cdot t+1$

$at=1$

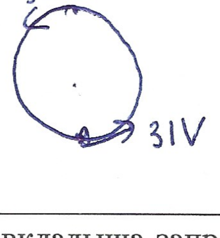




~~$1+2a\cdot x=a\cdot x$~~

$32Vt=31Vt+1$

$Vt=1$



Чистовик

№1

а) Докажем, что остаток от деления квадрата любого натурального числа на 4 равен либо 0, либо 1. Если число чётное, то в его разложение ~~входят~~ на прост. множители входит 2 ⇒ квадрат этого числа делится на 4. Если число нечетное, то представим его в виде $n+1$, где n – четное. Тогда $(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{\text{делится на 4}} + \underbrace{2n}_{\text{делится на 4}} + \underbrace{1}_{\text{ост 1.}}$. Остаток 1.

от противного.

Рассмотрим трехчлен ax^2+bx+c. $D = b^2-4ac=2019$
Остаток от деления 2019 на 4 равен 3. $4ac$ делится на 4. Значит b^2 при делении на 4 должно дать остаток 3. Как мы доказали, это невозможно. Противоречие.

Ответ: нет.

б) Да, возьмем например $x^2+16x-441$

$D = 16^2+4\cdot 441 = 2020$

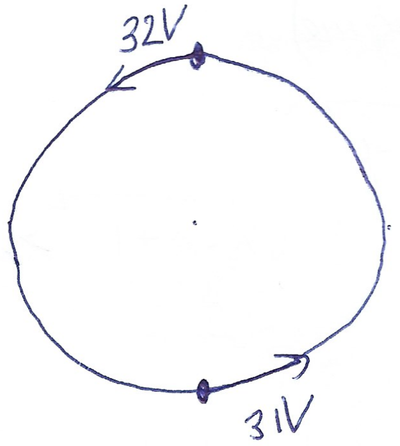
$$\begin{array}{r} \times\ 441 \\ 4 \\ \hline 1764 \\ +\ 256 \\ \hline 2020 \end{array}$$

Ответ: да

Шифр

Чистовик

№2



Без потери общности, пусть длина половины окружности равна 1, тогда длина полной 2. Скорость одного 31V, а скорость второго 32V.

Пусть они поравнялись через время t. Один проехал 31Vt, а второй 32Vt.

$$32Vt = 31Vt + 1$$

$$Vt = 1$$

Так как длина окружности 2, один проехал $\frac{31\cdot 1}{2} = 15,5$ кругов, а второй $\frac{32\cdot 1}{2} = 16$.

Округлим вниз до целых, чтобы узнать кол-во полных кругов.

Ответ: 15; 16.

№3

$$(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$\log_3 2 = \log_9 4 = \frac{1}{\log_4 9} = (\log_4 9)^{-1}$$

$$(\log_4 9)^{-\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$-\sqrt{x-a+1} = \sqrt{x^2+a^2-a-6}$$

Чистовик

№3 (продолжение)

$$-\sqrt{x-a+1} = \sqrt{x^2+a^2-a-6}$$

Так как $\sqrt{x^2+a^2-a-6} \geq 0$ и $\sqrt{x-a+1} \geq 0$

$$\begin{cases} x-a+1=0 \\ x^2+a^2-a-6=0 \end{cases}$$

$x-a+1=0 \Leftrightarrow x=a-1$. Подставим $x=a-1$ во второе уравнение.

$$(a-1)^2+a^2-a-6=0$$

$$a^2-2a+1+a^2-a-6=0$$

$$2a^2-3a-5=0$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$a_1 = 2{,}5$ $\quad$ $\cancel{a_2 = -2}$ $\quad$ $a_2 = -1$

$x_1 = 1{,}5$ $\quad$ $\cancel{x_2 = -3}$ $\quad$ $x_2 = -2$

При любых других a система $\begin{cases} x-a+1=0 \\ x^2+a^2-a-6=0 \end{cases}$ не имеет решений (в поле действ. чисел), а значит и ~~уравнение~~ исходное уравнение не имеет решений.

~~Ответ: 1) Если $a=2{,}5$, то $x=4$~~

Ответ: 1) Если $a = 2{,}5$, то $x = 1{,}5$

2) Если $a = -1$, то $x = -2$

3) Если $a \neq 2{,}5$ и $a \neq -1$, то $x \in \varnothing$.

Шифр

№4 чистовик

продолжение

1) $\dfrac{b-a-3}{ab} \geq 0$ (раскрываем модуль)

$$\frac{b-a-3}{\cancel{ab}} = \frac{a+1}{\cancel{ab}}$$

$$b-a-3=a+1$$

$$b-4=2a$$

$$b-4=2(11b-b^2-22)$$

$$b-4=22b-2b^2-44$$

$$2b^2-21b+40=0$$

$$b=\frac{21\pm\sqrt{441-8\cdot 40}}{4}=\frac{21\pm 11}{4}$$

$441-320=121$

~~нет целых корней~~

$b<5$

$b=\frac{5}{2}$

$a=\frac{55}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2-22$

2) $\dfrac{b-a-3}{ab}<0$ (раскрываем модуль)

$$\frac{b-a-3}{ab}=-\frac{a+1}{ab}$$

$$b-a-3=-a-1$$

$$b+2=0$$

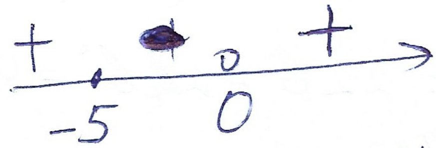
$$b=-2$$

№4
продолжение

$b=-2$. Осталось решить неравенства для a.

$$\begin{cases} \dfrac{-2-a-3}{-2a}<0 \Rightarrow \dfrac{-5-a}{-2a}<0 \\ 1-a\geq 0 \Rightarrow a\leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{5+a}{2a}>0. \Rightarrow a\in(-\infty;-5]\cup(0;+\infty)$$



$$a\in(-\infty;-5]\cup(0;1]$$

$$a=11b-b^2-22=-22-4-22=$$
$=-48$ подходит

Осталось сделать обр. замену.

Ответ: 1) $x=\operatorname{atan}(-48)+\pi k$

$y=\operatorname{atan}(-2)+\pi n$

$k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.$

2) $x=\operatorname{atan}\left(\frac{55}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2-22\right)+\pi k_2$

$y=\operatorname{atan}\left(\frac{5}{2}\right)+\pi n_2$

$k_2\in\mathbb{Z},\ n_2\in\mathbb{Z}$

№4

Осталось сделать проверку $b = \frac{5}{2}$

$a = \frac{55}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 22$

$$\begin{cases} \frac{b-a-3}{ab} \geq 0 \\ 3-a+b \geq 0 \end{cases}$$

Шифр

№4

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}y+|\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-3\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y|=0 \\ \sqrt{3-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}+\operatorname{tg}y-5=0 \end{cases}$$

Замена $\operatorname{tg}x=a,\ \operatorname{ctg}x=\frac{1}{a}\ (a\neq0)$

$\operatorname{tg}y=b,\ \operatorname{ctg}y=\frac{1}{b}\ (b\neq0)$

$$\begin{cases} -\frac{1}{ab}-\frac{1}{b}+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{3}{ab}\right|=0 \\ \sqrt{3-a+b}+b-5=0 \end{cases}$$

$\sqrt{3-a+b}=5-b \qquad \begin{cases} b<5 \\ 3-a+b\geq0 \end{cases}$

$3-a+b=25-10b+b^2$

$\boxed{a=11b-b^2-22}$

$\left|\frac{b-a-3}{ab}\right|=\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} \qquad \left|\frac{b-a-3}{ab}\right|=\frac{a+1}{ab}$

$\cancel{\frac{|b-a-3|}{|ab|}=\frac{a+1}{ab}}$

1) Раскроем модуль сначала при $\left|\frac{b-a-3}{a\cdot b}\right|>0$

$\frac{3-a+b}{ab}=\frac{a+1}{ab}$

$3-a+b=a+1$

$2+b=2a$

$2+b=2(11b-b^2-22)$

решение на доп. листе

Чистовик

№4 (продолжение)

$$2+b=22b-2b^2-44$$

$$2b^2-21b+46=0$$

$$b=\frac{21\pm\sqrt{441-368}}{4}=\frac{21\pm\sqrt{73}}{4}$$

Так как $b<5$, $b=\frac{21-\sqrt{73}}{4}>0$

$$a=11\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)-\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)^2-22$$

$$12<21-\sqrt{73}<13$$

$$3<\frac{21-\sqrt{73}}{4}<\frac{13}{4}$$

$$11\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)>33$$

$$\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)^2<\left(\frac{13}{4}\right)^2$$

$$33-\left(\frac{13}{4}\right)^2-22>0$$

$$\frac{169}{16}+\frac{22\cdot16}{16}<\frac{33\cdot16}{16}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times\ 16 \\ \hline 198 \\ 33\ \ \\ \hline 528 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ \times\ 16 \\ \hline 132 \\ 22\ \ \\ \hline 352 \\ +\ 169 \\ \hline 521 \end{array}$$

Значит $a>0$, $b>0$. $ab>0$.

Осталось проверить $3-a+b\geq0$

$$\underbrace{-10\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)}_{\wedge\ \frac{130}{4}}+\underbrace{\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)^2}_{\vee\ 9}+25\geq0$$

$$\begin{array}{r|l} 130 & 4 \\ 12\ \ & 32 \\ \hline 10 & \end{array}$$

Решение подходит

Чистовик

№4 (продолжение)

г) Теперь раскроем модуль $a \cdot b < 0$

$$\frac{3-a+b}{-ab} = \frac{a+1}{ab}$$

$$3-a+b = -1-a$$

$$4+b=0$$

$$b=-4$$

Т.к $a \cdot b < 0$, $a > 0$. Теперь выполним

при $\begin{cases} b<5 \\ 3-a+b \geq 0 \end{cases}$ ~~значит~~ $\begin{cases} 3+4=-1 \\ a \geq 1 \end{cases}$,

чтобы $-a-1 \geq 0$

Остается сделать обратную замену.

Ответ: 1) $x = atan\left(11\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right) - \left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right)^2 - 22\right) + \pi k_1$

$y = atan\left(\frac{21-\sqrt{73}}{4}\right) + \pi k_2$

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

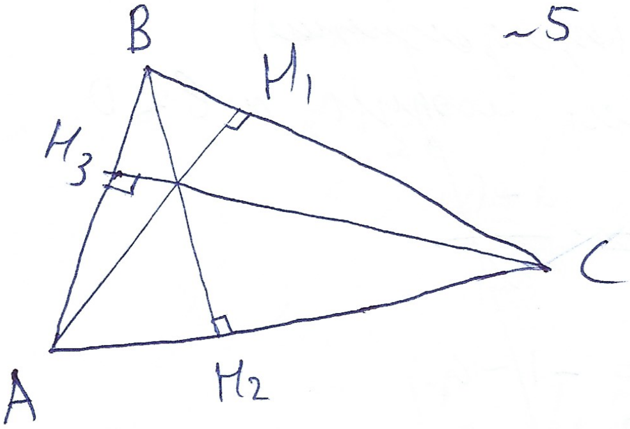
2) $x = atan(a) + \pi k_3$, где $a \geq 1$.

$y = atan(-4) + \pi k_4$

$k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$

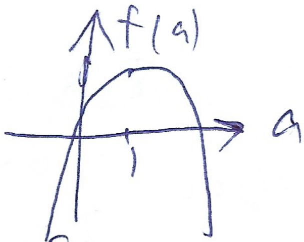
Чистовик

№5



$BH_1 \cdot BH_2 \cdot CH_3 =$
$= 7+2a-a^2$

Найдем наибольшее возможное значение $7+2a-a^2 = f(a)$



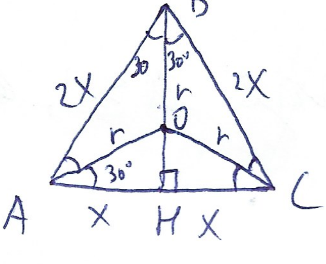
$f'(a) = 2-2a = 0$

$a=1$

$7+2-1=8$

Радиус будет максимальным тогда, когда Δ равносторонний *

Воспользуемся фактом, что радиус окружности, вписанной в треугольник ~~со сторонами a, b, c~~ площади S максимален тогда, когда треугольник равносторонний *.



Все высоты в равностороннем треугольнике равны.

$h^3=8 \Rightarrow h=2$

Пусть сторона треугольника равна $2X$

$X^2+4=4X^2$

$3X^2=4$

$X=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{X}{r} = \cos 30°$

$\dfrac{2}{\sqrt{3}r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

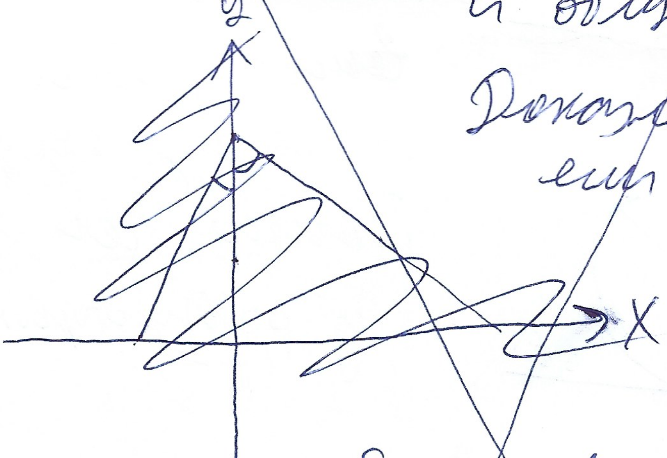
$3r=4 \Rightarrow r=\dfrac{4}{3}$

Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

№5

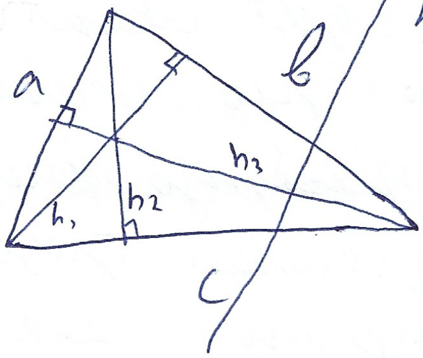
~~Доказат~~

⊛. Факт о том, что ~~...~~ радиус окружности, вписанной в треугольник площади S ~~доказан~~ является доказанным и общеизвестным.



Докажем теперь, что если произведение высот равно X~~a~~, то треугольник должен быть равносторонним, чтобы максимизировать радиус.

Из формулы площади, получим



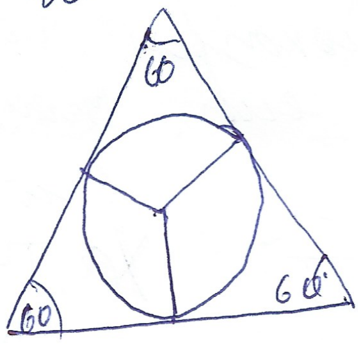
$$ah_3 = bh_1 = ch_2$$

$$h_1h_2h_3 = X$$

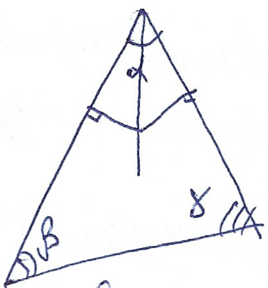
$$a = b = c$$

№5 Чистовик

⊛ Предположим, что $\exists$ треугольник, у которого произведение ~~сторон~~ ~~больше~~ высот равно 8,



а радиус окружности больше, чем у равностороннего.



В таком случае 1 из его углов будет меньше 60° (α).

Окружность будет лежать на биссектрисе этого угла. Очевидно, что при афинном преобразовании, переводящим равносторонний треугольник во второй окружность как бы сожмется $\Rightarrow$ радиус уменьшится. Это нестрогое доказательство. Строго можно доказать, выразив радиус окружности через его высоты и найдя минимум этой функции с помощью производной. Получится $h_1 = h_2 = h_3$.

Черновик

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y+\left|\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-3\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y\right|=0\\ \sqrt{3-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}+\operatorname{tg}y-5=0\end{cases}$$

$\operatorname{tg}x=a\neq0$ $\qquad$ $\operatorname{tg}y=b\neq0$

$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{a}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}y=\frac{1}{b}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{ab}+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{3}{ab}\right|=0\\ \sqrt{3-a+b}+b-5=0\end{cases}$$

$\sqrt{3-a+b}=5-b$ $\qquad$ $b<5$

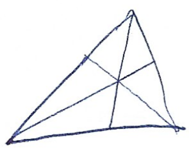
$3-a+b=25-10b+b^2$ $\qquad$ $3-a+b>0$

$b^2-11b+a+22=0$

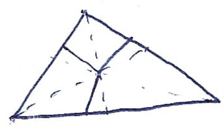
$a=-22+11b-b^2$

$$-\frac{1}{ab}+\left|\frac{b-a-3}{ab}\right|=0$$

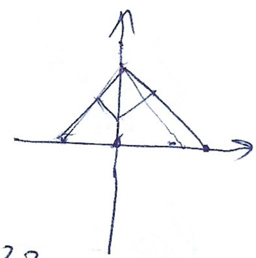
$21\cdot21=441$, $441-368=73$, $46\cdot8=368$



$441-\cancel{368}=\cancel{809}$ $\qquad$ $46\cdot8=368$ $\qquad$ $441-368=73$



$12<21-\sqrt{73}<13$



$11\cdot\frac{13}{4}$ $\qquad$ $33-\left(\frac{13}{4}\right)^2-22$

$\cancel{\frac{169}{16}+\frac{16}{1}}$ $\qquad$ $\frac{169}{16}+\frac{22\cdot16}{16}$

Черновик

$$(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$\cancel{\log_9 4 = \log_3 2}$ $\log_4 9 = \log_2 3$

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3}$$

$\log_3 9 = 2$

$\log_9 81 = 2$

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x-a+1}} = \left(\frac{1}{\log_2 3}\right)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$\begin{array}{r} +\ 6{,}25 \\ 2{,}25 \\ \hline 8{,}5 \end{array}$$

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$(\log_2 4)^y = \left(\frac{1}{(\log_4 2)}\right)^y$$

$x-a+1=0$

$x=a-1$

$x^2+a^2-a-6=0$

$\cancel{x = \sqrt{\quad}}$

$(a-1)^2+a^2-a-6=0$

$a^2-2a+1+a^2-a-6=0$

$a^2-3a-5=0$

$a = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$

$$\left(\frac{1}{\log_2 8}\right) = (\log_8 2)^{-1}$$

$\cancel{\log_3 27}$ $\log$ $\log_{64} 8^2$

$\log_4 64$

$$\log_8 2 = \log_{64} 4 = \frac{1}{\log_4 64} = (\log_4 64)^{-1}$$