МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Куцаков Александр Сергеевич**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№ 1

b_1 - первый член

q - множитель геом. прогр.

Тогда прогр. выглядит так:

$b_1 \quad b_1 q \quad b_1 q^2 \quad b_1 q^3 \quad b_1 q^4 \quad b_1 q^5$

ср. арифм. первых 4-х членов:

$$\frac{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3}{4} = \frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4} = 15 \quad (1)$$

ср. арифм. последних 4-х:

$$\frac{b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5}{4} = \frac{b_1 \cdot (1+q+q^2+q^3) \cdot q^2}{4} = 60 \quad (2)$$

поделив (2) на (1): $q^2 = \frac{60}{15} = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

I $q = 2$ из (1):

$$\frac{b_1 \cdot (1+2+4+8)}{4} = 15$$

$\frac{b_1 \cdot 15}{4} = 15 \Rightarrow b_1 = 4$

последний член:

$b_1 \cdot q^5 = 4 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$

II $q = -2$ из (1):

$$\frac{b_1 \cdot (1 - 2 + 4 - 8)}{4} = 15$$

$\frac{b_1 \cdot (-5)}{4} = \overset{-3}{\cancel{15}} \Rightarrow b_1 = -12$

последний член:

$b_1 \cdot q^5 = -12 \cdot (-2)^5 = 12 \cdot 32 = 2^7 \cdot 3 = 384$

Ответ: 128; 384.

№ 2

$x^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot x \quad (\pi x_{рад} = x^\circ \cdot 180)$

$\sin(\pi x) = \sin\left(3 \cdot \frac{\pi x}{180}\right)$

$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$

Пусть $\pi x = \alpha$; $\frac{\pi x}{60} = \beta$

тогда

$\sin\alpha - \sin\beta = 0$

$2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$

$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$

$\frac{\alpha-\beta}{2} = \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

$\pi x - \frac{\pi x}{60} = 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

$\frac{59}{60}\pi x = 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \cancel{\pi k};\ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha + \beta = \pi + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\frac{61}{60}\cancel{\pi}x = \overset{1}{\cancel{\pi}} + 2\cancel{\pi}k;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{60(1+2k)}{61};\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{120n}{59}$; $n \in Z$

в этой серии min разница между корнями:

$\frac{120(n+1)}{59} - \frac{120n}{59} = \frac{120}{59} > 1$

т.к. $n \in Z$
(любые 2 знач. n отлич не ~~более~~ менее, чем на 1)

$x = \frac{60(2k+1)}{61}$; $k \in Z$

min разница между корнями в этой серии:

$-\frac{60(2k+1)}{61} + \frac{60(2(k+1)+1)}{61} =$

$= \frac{60(2k+3) - 60(2k+1)}{61} = \frac{120}{61} > 1$

($k \in Z$, любые два знач. k отлич. хотя бы на 1)

Теперь рассмотрим разность между корнями разных серий (k, n - целые)

$$\min\left|\frac{60(2k+1)}{61} - \frac{120n}{59}\right| = \min\left(60 \cdot \left|\underbrace{\frac{2k+1}{61} - \frac{2n}{59}}_{t}\right|\right)$$

$$t = \frac{2k+1}{61} - \frac{2n}{59} = \frac{59(2k+1) - 122n}{61 \cdot 59} = \frac{118k - 122n + 59}{61 \cdot 59} -$$

т.о. требуется найти min по модулю значение t, т.о. требуется найти min по модулю знач. числителя (в знам. константа)

min по модулю знач. числителя - целое число, поскольку n и k - целые

$A = 118k - 122n + 59 \neq 0$

(поскольку $118k - 122n \,\vdots\, 2$, $59 \not\vdots\, 2$ => (чёт+нечёт=нечёт) значение A нечётно, значит, не равно 0, $A \in Z \Rightarrow |A| \geq 1$.)

Тогда $|118k - 122n + 59| \geq 1$

Докажем, что такое значение достигается:

Пусть $n = k = 15$, тогда получим:

$118 \cdot 15 - 122 \cdot 15 + 59 = -4 \cdot 15 + 59 = -1$ - модуль равен 1

$\min(|118k - 122n + 59|) = 1 \Rightarrow$

Значит, $\min\left(60 \cdot \left|\frac{2k+1}{61} - \frac{2n}{59}\right|\right) = \min\left(60 \cdot \frac{|118k - 122n + 59|}{61 \cdot 59}\right) =$

$= \frac{60}{61 \cdot 59}$ - это значение меньше единицы => меньше полученных разностей внутри серий, т.о., оно и является min расстоянием между корнями

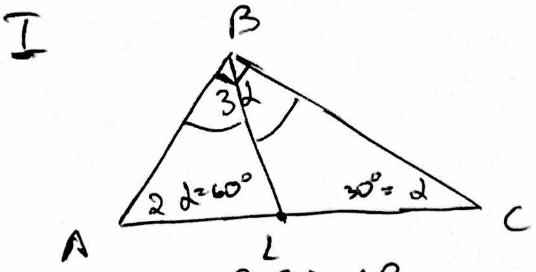
Ответ: $\frac{60}{61 \cdot 59}$.

№3

Третий угол — наибольший => лежит напротив наибольшей стороны. Пусть наим. угол равен α, тогда „средний" равен 2α, а наибольший — либо 3α, либо 6α, поскольку он в 3 раза больше одного из двух других ($3\alpha > 2\alpha > \alpha$, $6\alpha > 2\alpha > \alpha$ => поэтому 3-й угол наиб.)

Значит, сущ. 2 случая:

I



$3\alpha + 2\alpha + \alpha = 180° = 6\alpha$ => $\alpha = 30°$

$\angle B = 3\alpha = 90°$
$\angle C = 30°$
$\angle A = 60°$

$AC > BC > AB$ => $AC = BC + 10$ (по усл.)
$\angle B > \angle A > \angle C$

$AC = \frac{AB}{\sin 30°} = 2AB = \frac{BC}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}} BC = (BC+10)\cdot\sqrt{3}$

$2BC = \sqrt{3}BC + 10\sqrt{3}$

$BC = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

Пусть BL — бис. угла B, тогда $\angle ABL = \angle LBC = 45°$.

по св-ву бис. $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ => $LC = \sqrt{3}AL$ => $AL = \frac{AC}{1+\sqrt{3}}$

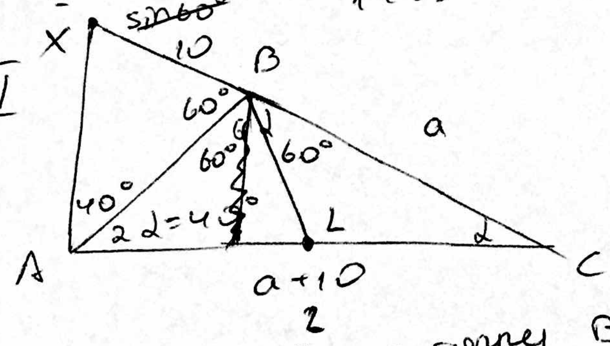
=> $AC = AL + LC = AL + \sqrt{3}AL = (1+\sqrt{3})AL$ =>

По т. синусов для $\triangle ABL$:

$\frac{AL}{\sin\angle ABL} = \frac{BL}{\sin\angle BAL}$ => $BL = \frac{AL\cdot\sin\angle BAL}{\sin\angle ABL} = \frac{AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$= \frac{BC}{\sin 60°}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{BC\cdot\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

II



$\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180° = 9\alpha$ => $\alpha = 20°$

$\angle B = 120°$
$\angle C = 20°$
$\angle A = 40°$

$\angle B > \angle A > \angle C$ => $AC > BC > AB$ =>

=> $BC + 10 = AC = a + 10$ ($BC = a$)

Продлим BC за точку B на $BX = 10$, тогда $XC = AC = a+10$ =>

=> $\angle CAX = \angle CXA = \frac{180° - \angle C}{2} = 80°$ => $\angle XAB = 80° - \angle BAC = 40°$

Пусть BL — бис. $\angle ABC$, тогда $\angle ABL = \angle CBL = \frac{120°}{2} = 60°$.

$\angle ABX = 180° - \angle ABL = 60°$. Заметим, что для $\triangle ABX$ и $\triangle ABL$:

$\left.\begin{array}{l} AB \text{ — общая} \\ \angle BAL = \angle XAB \\ \angle LBA = \angle ABX \end{array}\right\}$ => $\triangle ABL = \triangle ABX$ (по стороне и двум прилег. к ней углам) => $BL = BX = 10$.

Ответ: $\frac{10\sqrt{5}}{(2-\sqrt3)(1+\sqrt3)}$; 10.

№4

$a \in [-5;6]$; $a \in Z$

a - ?, при которых ур-е:

$3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x-a+2=0$

имеет 3 реал. корня, из которых хотя бы 2 корня целые.

Заметим, что $x=-1$ - корень:

$3\cdot(-1)^3-(3a-4)\cdot(-1)^2-(2a-3)\cdot(-1)+a+2=$

$=-3-\cancel{3a}+4+\cancel{2a}-3+\cancel{a}+2=0$

Вынесем $x+1$:

$(x+1)(3x^2+(1-3a)x+a+2)=0$

$(x+1)(x^2-(a-\frac{1}{3})x+\frac{a+2}{3})=0$

$f(x)=x^2-(a-\frac13)x+\frac{a+2}{3}$ - имеет целый корень (хотя бы один)

Пусть n, m - корни по т. Виета тогда; n - целый, тогда m имеет вид $\frac{k}{3}$, где

$\begin{cases} n+m=a-\frac13 \ (1) \\ nm=\frac{a+2}{3} \ (2) \end{cases}$ $k \in Z$, $k \not\vdots 3$

Действительно, ведь из (1): $m=\underbrace{a-n}_{\text{целое число}}-\frac13=\frac{k}{3}$

Подставив, получим:

$\begin{cases} n+\frac{k}{3}=a-\frac13, \\ m\cdot\frac{k}{3}=\frac{a+2}{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} 3n+k=3a-1 \\ kn=a+2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3n+k=3a-1 \\ 3kn=3a+6 \end{cases}$ $\Rightarrow 3n+k=3a+6-7=3nk-7$

$k+7=3nk-3n$

$n=\frac{k+7}{3(k-1)}$ - целое число $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $k+7 \vdots 3(k-1)$

(k - тоже целое ($k \not\vdots 3$))

НОД $(k+7, k-1)=$ НОД $(k+7, 8)=k-1$ (действительно, ведь $(k+7)\vdots(k-1)$)

НОД $(k+7,k-1)=$ НОД $(k+7, 8) \Rightarrow$ "=" означает

тогда $k-1$ - делитель числа 8 $\Rightarrow$ $k-1=-8;-4;-2;-1;1;2;4;8$ } "является одним из этих чисел

$\Rightarrow k-1=-8;-4;-2;-1;1;2;4;8$

$k+7=0;4;6;7;9;10;12;16$

Поскольку $k+7 \vdots 3$, то $k+7=0;6;9;12$ (из перечисленных)

т.е. $k=-7;-1;2;5$.

I $k=-7$

$n=\frac{k+7}{3(k-1)}=0$

корни:

$m=\frac{k}{3}=-\frac{7}{3}$

$n=0$; из (2):

$\frac{a+2}{3}=-\frac{7}{3}\cdot 0=0$

$a=-2\in[-5;6]$

тогда исходное ур-е имеет корни $-1; 0; -\frac{7}{3}$ — значит, такое значение a подходит

II $k=-1$

$n=\frac{k+7}{3(k-1)}=\frac{6}{3\cdot(-2)}=-1$

корни:

$n=-1$

$m=-\frac{1}{3}$

Однако тогда -1 — повторяющийся корень, а они должны быть различны. Значит, этот случай не подходит.

III $k=2$

$n=\frac{k+7}{3(k-1)}=\frac{9}{3\cdot 1}=3$

$m=\frac{k}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{a+2}{3}=\frac{2}{3}\cdot 3=2$

$a+2=6$

$a=4\in[-5;6]$

корни: $3; \frac{2}{3}; -1$ — разл.

значит, $a=4$ подходит.

IV $k=5$

$n=\frac{k+7}{3(k-1)}=\frac{12}{12}=1$

$m=\frac{k}{3}=\frac{5}{3}$

$\frac{a+2}{3}=\frac{5}{3}\cdot 1$

$a+2=5$

$a=3\in[-5;6]$

корни: $-1; 1; \frac{5}{3}$ — разл.

значит, $a=3$ подходит.

Т.о., подходят 3 значения a из данного промежутка.

Всего значений a: $\left.\begin{matrix}-5; -4; -3; -2; -1; 0\\ 6; 5; 4; 3; 2; 1\end{matrix}\right\}12$ =>

=> вероятность того, что ур-е будет иметь 3 разл. корня, из которых хотя бы 2 целые:

$\frac{3}{12}=0{,}25$

Ответ: 0,25.

№5

Заметим, что букв А в слове длины 20 не более 10. Действительно, разделив его на 10 пар подряд идущих букв, получим, что в каждой не более одной буквы А => всего их не более 10 (если в одной паре две буквы, то они стоят рядом).

Между буквами А стоят „барьеры" из букв Б — длина каждого 1 или 2 (поскольку подряд более двух букв Б стоять не может). Тогда количество букв Б ... количество „барьеров" на 1 меньше, чем количество букв А, поскольку „барьер" и А чередуются, но слово начинается и заканчивается буквой А, т.о, в пару каждой А, кроме последней, найдётся „барьер", идущий сразу после неё. Длина же всех барьеров равна разности числа 20 и длины, т.е. количества букв А (поскольку все буквы А стоят отдельно)

$L(A)$ – длина (кол-во) букв А ($L(A) \le 10$ по доказанному)
$L(B)$ – длина „барьеров"; k – кол-во „барьеров"
$k = L(A) - 1$ – по доказ.
$L(Б) = 20 - L(A)$ (также по доказ.)
x – кол-во „барьеров" из одной буквы Б
y – кол-во „барьеров" из двух букв Б

тогда $x + y = k$
кол-во способов расставить „барьеры": $C_{x+y}^{x} = C_{x+y}^{y} = \frac{(x+y)!}{x! \cdot y!}$

Действительно, ведь „барьеры" одинаковой длины не отличимы, а их расстановкой однозначно определяется слово (при фиксированных $L(A), x, y$), поскольку при заданной расстановке „барьеров" нужно лишь расставить их на расстоянии 1 друг от друга по очереди, отступив 1 „клетку" для первой буквы А. Поскольку все буквы А одинаковые, существует лишь один способ расставить их на пропущенные „клетки". *

I $L(A) = 10$ * (продолжение после *)

$k = 9$

$L(B) = 10$

$2y + x = L(B) = 10$

$x + y = k = 9$

$2y + x - (x+y) = y = 1$

$x = 9 - y = 8$

кол-во способов:

$C_{x+y}^{x} = C_9^8 = 9$

II $L(A) = 9$

$k = L(A) - 1 = 8$

$L(B) = 20 - 9 = 11$

$2y + x = L(B) = 11$

$x + y = k = 8$

$L(B) - k = y = 3$

кол-во способов:

$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56 = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$

III $L(A) = 8$

$k = 7$

$L(B) = 12$

$2y + x = 12 \Rightarrow$

$x + y = 7$

$\Rightarrow y = 5$

кол-во способов:

$C_7^5 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 = C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!}$

IV $L(A) = 7$

$k = 6$

$L(B) = 13$, в этом случае

$2y + x = 13$
$x + y = 6$ $\Rightarrow y = 7 \Rightarrow x = -1$ – что невозможно $(x \ge 0) \Rightarrow L(A) > 7$.

Действительно, при $L(A) < 7$: значение k уменьшается, а $L(B)$ – увеличивается $\Rightarrow$ $\Rightarrow y = L(B) - k$ – увеличивается $\Rightarrow$ $\Rightarrow x = k - y$ – уменьшается, но по сравнению с x из случая IV $\Rightarrow$ * остаётся отрицательным и таких слов не существует.

кол-во слов:

Значит, суммарное
$9 + 56 + 21 = 86$

Ответ: 86.

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!" Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А Садовничему ученика 11 класса МАОУ „Гимназия № 1" г. Брянска Кудакова Александра Сергеевича

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (95) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что она может претендовать на более высокий балл. Я перечитал свои решения несколько раз и не нашёл недочётов, потому прошу об ещё одной проверке.

30.05.2020г.