



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Толпаров Валерий Яковлевич**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 4)x^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

ВАРИАНТ 1

N: 1

$$\begin{cases} \frac{aq + a + aq^2 + aq^3}{4} = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5}{4} = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(1 + q^2 + q + q^3) = 60 \end{cases}$$

Делим

$$\begin{cases} aq^2(1 + q + q^2 + q^3) = 240 \end{cases}$$

$$q^2 = 4 ; q = \pm 2$$

$$q = 2$$

$$a(1 + 2 + 4 + 8) = 60$$

$$a = 4 ; \Rightarrow aq^5 = 4 \cdot 2^5 = 128$$

$$q = -2$$

$$a = -12$$

$$aq^5 = -12 \cdot (-2)^5 = +384$$

Ответ: 128 и 384

1 СТР

N:2 Вариант 3

$$x^{\circ} = \frac{\pi x}{180} \text{ радиан}$$

$$\sin \pi x = \sin \frac{3\pi x}{180}$$

$$\left[\pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k \right.$$

$$\left. \pi x = \pi - \frac{\pi x}{60} + 2\pi k \right.$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\frac{59x}{60} = 2k \right.$$

$$\left. \frac{61x}{60} = 1 + 2k \right.$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{120k}{59} \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{60(1+2k)}{61} \quad (2) \end{array} \right.$$

1) минимальное расстояние между корнями из (1) равно $\frac{120}{59}$

2) минимальное расстояние между корнями из (2) равно $\frac{120}{61}$

2 стр

№ 2 (продолжение) 3 стр
III) найдем мин. расстояние

между корнями из (1) и (2), то
есть минимум

$$A = \left| \frac{120k}{59} - \frac{60(1+2n)}{61} \right|, \quad k \text{ и } n - \text{целые}$$

$$A = \frac{60}{59 \cdot 61} |122k - 59(1+2n)|$$

$$|122k - 118n + 59| - \text{четное число}$$

$$|118(k-n) + 4k - 59| = 1 \quad \text{или} \quad \text{или}$$

$$\text{при } k=15, \quad n=k \Rightarrow$$

минимум A будет равен $\frac{60}{59 \cdot 61}$

$$\frac{60}{59 \cdot 61} \quad \text{сравним 3 числа: } \frac{120}{59}, \frac{120}{61}, \frac{60}{59 \cdot 61}$$

$$\frac{120}{59} > 1; \quad \frac{120}{61} > 1; \quad \frac{60}{59 \cdot 61} < 1$$

N:2 (Ombem)

Ombem: ~~58.61~~

~~58.61~~

Ombem: $\frac{60}{59.61}$

4 CTP

N: 4

5 стр

~~$$3x^3 - 3ax^2 + 4x^2 - 2ax + 3x + a + 2 = 0$$~~

$$3x^3 - 3ax^2 + 4x^2 - 2ax + 3x + a + 2 = 0$$

$$3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 - a(3x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$(x+1)(3x^2 + x + 2) - a(x+1)(3x-1) = 0$$

~~$$(x+1)(3x^2 + x + 2) - a(x+1)(3x-1) = 0$$~~

$$(x+1)(3x^2 + x(1-3a) + 2+a) = 0$$

$$x_1 = -1; \quad x_{2,3} = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2 - 18a - 23}}{6}$$

3 корня $\Rightarrow$ 1) $D = 9a^2 - 18a - 23 > 0$
 2) x_2, x_3 не совпадают с x_1

$$I) D > 0 \quad 9(a-1)^2 - 34 > 0$$

a целое из $[-5; 6] \Rightarrow$ подходит

$$a = -5; a = -4; a = -3; a = -2; a = -1$$

№4 (продолжение) БСТР

~~где~~, $a=3$; $a=4$; $a=5$; $a=6$

II) $x = -1$ не корень уравнения

$$3x^2 + x(1-3a) + 2+a = 0$$

$$3 - (1-3a) + 2+a \neq 0$$

~~где~~ $4+4a=0$

$$a \neq -1$$

теперь посмотрим, когда корни Δ_1

2 корня целые. $x_1 = -1$ - целое. Для

целочисленности x_2 или x_3 нам
необходимо, чтобы $\sqrt{D}$ было целым

$$a = -5 \quad \sqrt{9 \cdot 6^2 - 32} = \sqrt{292} \quad \cancel{\notin \mathbb{Z}} \notin \mathbb{Z}$$

$$a = -4 \quad \sqrt{9 \cdot 5^2 - 32} = \sqrt{493} \notin \mathbb{Z}$$

$$a = -3 \quad \sqrt{9 \cdot 4^2 - 32} = \sqrt{112} \notin \mathbb{Z}$$

$$a = -2 \quad \sqrt{9 \cdot 3^2 - 32} = \sqrt{49} \in \mathbb{Z}$$

N. 4 ~~(второе продолжение)~~ 7 стр
(второе продолжение)

$a = -1$ не проверяем ~~(6-1)~~ и об

~~тут~~ / в II мы $a = -1$ исключим)

$$a = 3 \quad \sqrt{9 \cdot 4 - 32} = \sqrt{4} \in \mathbb{Z}$$

$$a = 4 \quad \sqrt{9 \cdot 3^2 - 32} = \sqrt{49} \in \mathbb{Z}$$

$$a = 5 \quad \sqrt{9 \cdot 4^2 - 32} = \sqrt{112} \notin \mathbb{Z}$$

$$a = 6 \quad \sqrt{9 \cdot 5^2 - 32} = \sqrt{193} \notin \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ как получим только $-2; 3; 4$,

то есть 3 числа 43 12 возможны? $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{вероятность} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

N:3 CTP 8

I курс

α, β, γ - углы

$\alpha = 2\beta$; $\gamma = 3\beta$

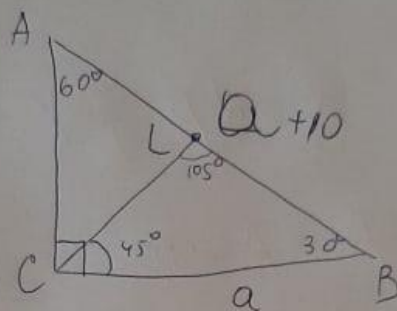
$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

$$6\beta = 180^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$



$$AB = a + 10$$

$$CB = a$$

$$\frac{a}{a+10} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; a\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 2a ; a(2-\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}$$

$$a = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} ; CL - \text{иссектриса}$$

$$\frac{CL}{\sin 30^\circ} = \frac{CB}{\sin 105^\circ}$$

$$CL = \frac{a \cdot \frac{1}{2}}{\sin(45^\circ + 60^\circ)}$$

$$\sin(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

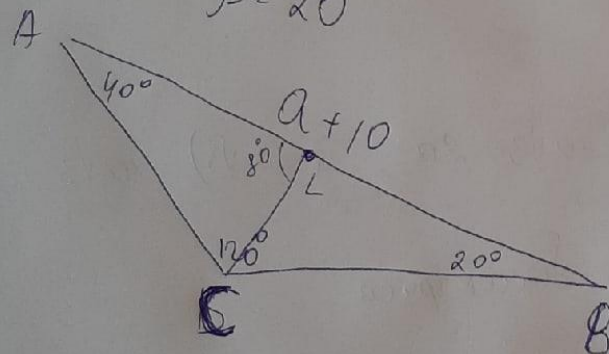
$$CL = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3}+1)} = \frac{N:3}{2a^3} = \text{стр 9}$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \sqrt{3}}{\sqrt{2} (\sqrt{3}+1) (2-\sqrt{3})} = \frac{10 \sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$$

II суграи $\alpha = 2\beta$, $\gamma = 3\alpha = 6\beta$

$$2\beta + \beta + 6\beta = 180^\circ; \quad \cancel{2\beta + \beta + 6\beta = 180^\circ}$$

$$\beta = 20^\circ$$



$$\frac{a+10}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 40^\circ}$$

$$a \cdot \sin 40^\circ + 10 \sin 40^\circ = a \sin 120^\circ$$

$$a \sin 40^\circ + 10 \sin 40^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a = \frac{10 \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}$$

~~$$a \sin 40^\circ + 10 \sin 40^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$~~

N:3 CTP 10

$$\frac{CL}{\sin 20^\circ} = \frac{a}{\sin 100^\circ}$$

$$CL = \frac{a \cdot \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{10 \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ (\sin 120^\circ - \sin 40^\circ)} =$$

$$= \frac{10 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ \cdot 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{5 \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ \cdot \cos 80^\circ}$$

($\sin 100^\circ = \cos(100-90^\circ)$; $\cos 80^\circ = \sin(90-80^\circ)$, формула приведения)

$$= \frac{5 \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{10 \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \cos 80^\circ} =$$

$$= \frac{10 \sin 10^\circ}{\cos 80^\circ} = \frac{10 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 10$$

$$\text{Ответ: } \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}; 10$$

Если отбросить последнюю букву А,
то слово можно разбить на
ячейки вида $[AB]$ или $[ABB]$,
которые идут друг за другом
пусть x ячеек $[AB]$ x штук
 $[ABB]$ y штук

$$2x + 3y = 19 \quad (20-1, \text{т.к. последнюю букву отбросили})$$

решим уравнение $x \geq 0$ и ~~целое~~ целое
 $y \geq 0$ и целое

$x=1$ не подходит

$x=2$ $y=5$

$x=3$ не подходит

$x=4$ не подходит

$x=5$ $y=3$

$x=6$ не подходит

$x=7$ не подходит

$x=8$ $y=1$

$x=9$ не подходит

Таким образом $x=2, y=5$

$x=5, y=3$

$x=8, y=1$

1) $x=2, y=5$, найдем количество
расположений семи ячеек, 2 ячейки $\boxed{AB}$
5 ячеек $\boxed{ABB}$. Одна ячейка AB может
стоять на любом из 7 мест, вторая -
на любом из оставшихся 6 мест $\Rightarrow$
кол-во различных расположений

$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ (разделим на 2, т.к. каждая
расположение посчитали дважды)

2) $x=5; y=3$ аккордно

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad \left(\text{ячейку } \boxed{AB\bar{B}}, \text{ на месте} \right.$$

из 8 мест, 2-ую ячейку
 $AB\bar{B}$ - на месте из 7 мест,
 3-ю ~~ячейку~~ ячейку на месте из
 6 мест.

Делим на $3 \cdot 2 \cdot 1$, т.к. опять одно
 расположение посчитали несколько
 раз (6 раз)

3) $x=8; y=1$ - найдем кол-во
 расположений 9 букв (8 букв $\boxed{AB}$ и 1
 ячейку $\boxed{AB\bar{B}})$ $\equiv$ кол-во расположений
 букв $\boxed{AB\bar{B}} = 8$

Итого : $8 + 56 + 21 = 85$

Ответ: 85