



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Савина Дарья Андреевна**

Технический балл: **95**

Дата: **16 февраля 2020 года**

**Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 2-2

1. Дан квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Может ли его дискриминант быть равен: а) 2024; б) 2023?
2. Велотрек имеет форму окружности. Из его диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста, которые двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями. Сколько полных кругов проедет каждый велосипедист до того момента как они поравняются первый раз после старта, если отношение их скоростей равно $\frac{80}{77}$.
3. Для каждого a решите уравнение $(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$.
4. Решите систему

$$\begin{cases} -2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y + |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - 3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y| = 0, \\ \sqrt{3 - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} + \operatorname{ctg} y - 4 = 0. \end{cases}$$

5. Рассматриваются все треугольники, для которых существует такое действительное число a , что произведение трех высот треугольника равно величине $60 + 4a - a^2$. Найдите наибольший возможный радиус вписанной в такой треугольник окружности.

февраль-март 2020 г.

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_5 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_3 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$\frac{1}{(\log_3 5)^{\sqrt{x-2a-1}}} = (\log_3 5)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$a^b = 1$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$(\log_3 5)^{\frac{265}{2809} \cdot (\log_3 5)^{\sqrt{x-2a-1}}} = 1 \quad b = \log_a 1$$

$$(\log_3 5)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8} + \sqrt{x-2a-1}} = 1$$

$$73b^2 - 53b + 16 = 0$$

$$D = 53^2 - 4 \cdot 73 \cdot 16 = 1057$$

$$\begin{matrix} -81b^2 \\ -45 \\ 126 \end{matrix}$$

$$\sqrt{x^2+a^2-2a-8} + \sqrt{x-2a-1} = 0$$

$$\begin{matrix} x^2+a^2-2a-8=0 & \times 73 & 1 & 126 & 73 & 17 & 68 \\ x-2a-1=0 & 292 & 53 & 34 & 85 \\ & 146 & & 51 & & 136 \end{matrix}$$

$$a = -\frac{7}{5}$$

$$x = 2a + 1 = -\frac{14}{5} + 1 = -\frac{9}{5}$$

$$\begin{cases} -2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y + |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y| = 0 \\ \sqrt{3 - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} + \operatorname{ctg} y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \operatorname{tg} x \neq 0 & \frac{5-6}{8-3} = \frac{-1}{5} \\ b = \operatorname{tg} y \neq 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a - b - 3ab| = b + 2ab \\ \sqrt{3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 4 - \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$(a - b - 3ab)^2 = b^2 + 4a^2b^2 + 4ab^2$$

$$b + 2ab \geq 0$$

$$3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{73}{132} - \frac{132}{126} = \frac{6}{6}$$

§ 1

Чистовик

а) да, может

Пример:

$$23x^2 + 46x + 1$$

$$D = 46^2 - 4 \cdot 23 = 2116 - 92 = 2024$$

Ответ: да, может

б) $ax^2 + bx + c$

$$D = b^2 - 4ac = 2023$$

($a \equiv b \pmod{n}$ означает, что при делении a на n будет остаток b)

$$2023 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow b^2 - 4ac \equiv 3 \pmod{4}$$

$$4ac : 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$1) \quad \neg b : 4 \Rightarrow b^2 : 4$$

$$2) \quad \neg b \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$3) \quad \neg b \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow b^2 : 4$$

$$4) \quad \neg b \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow b^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow$$

$\Rightarrow b^2$ при делении на 4 не может давать в остатке 3 $\Rightarrow$ дискриминант не может быть равным 2023

Ответ: нет, не может

§ 2.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{80}{77}$$

$$\neg v_1 = 80x$$

$$v_2 = 77x$$

r - радиус велотрека, имеющего форму окружности

1) ~~2~~ велосипедисты движутся в одну сторону с постоянными скоростями $\Rightarrow$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 80x - 77x = 3x \quad \text{— скорость сближения}$$

2) длина велотрека : $2\pi r$

$$4) \quad \frac{2\pi r}{3x} = t \quad \text{— время, через которое велосипедисты поравняются}$$

5) $80x \cdot t$ — путь, который пройдет первый велосипедист до встречи
 $77x \cdot t$ — путь, который пройдет второй до встречи

6) $\left[\frac{80x \cdot t}{2\pi r} \right] = k_1$ - число полных кругов, которых проехал первый до встречи

$\left[\frac{77x \cdot t}{2\pi r} \right] = k_2$ - число полных кругов, которых проехал второй до встречи

где $[a]$ - целая часть числа a

$k_1 = \left[\frac{80x \cdot 2\pi r}{3x \cdot 2\pi r} \right] = 26$ (кругов)

$k_2 = \left[\frac{77x \cdot 2\pi r}{3x \cdot 2\pi r} \right] = 25$ (кругов)

Ответ: 26 и 25 полных кругов

Задача 3.

$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$

$\frac{1}{(\log_3 5)^{\sqrt{x-2a-1}}} = (\log_3 5)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$ $\left(\begin{array}{l} \log_3 5 > 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\log_3 5)^{\sqrt{x-2a-1}} \neq 1 \end{array} \right)$

$(\log_3 5)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8} + \sqrt{x-2a-1}} = 1 > 0$

$\sqrt{x^2+a^2-2a-8} + \sqrt{x-2a-1} = \log_{\log_3 5} 1$ $\left(\begin{array}{l} \log_3 5 > 1 \\ 5 > 3 \end{array} \right)$

$\sqrt{x^2+a^2-2a-8} + \sqrt{x-2a-1} = 0$
 $\geq 0 \quad \geq 0$

$\begin{cases} x^2 + a^2 - 2a - 8 = 0 \\ x - 2a - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2a + 1 \\ 4a^2 + 1 + 4a + a^2 - 2a - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$

(1) $5a^2 + 2a - 7 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 35 = 36$

$$a = \frac{-1 \pm 6}{5}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ x = 3 \\ a = -\frac{7}{5} \\ x = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\text{при } a \in (-\infty; -\frac{7}{5}) \cup (-\frac{7}{5}; 1) \cup (1; +\infty) \\ x \in \emptyset$$

$$\text{при } a = 1$$

$$x = 3$$

$$\text{при } a = -\frac{7}{5} \quad \frac{7}{5}$$

$$x = -\frac{9}{5}$$

$$\text{Ответ: при } a \in (-\infty; -\frac{7}{5}) \cup (-\frac{7}{5}; 1) \cup (1; +\infty) \\ x \in \emptyset$$

$$\text{при } a = 1$$

$$x = 3$$

$$\text{при } a = -\frac{7}{5} \quad \frac{7}{5}$$

$$x = -\frac{9}{5}$$

№ 4.

$$\begin{cases} -2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y + |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y| = 0 \\ \sqrt{3 - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} + \operatorname{ctg} y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} \operatorname{tg} x = a \neq 0 & \operatorname{ctg} x = \frac{1}{a} \neq 0 \\ \operatorname{tg} y = b \neq 0 & \operatorname{ctg} y = \frac{1}{b} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a \cdot b - b + |a - b - 3ab| = 0 \\ \sqrt{3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a - b - 3ab| = 2ab + b \\ \sqrt{3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 4 - \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab + b \geq 0 \\ 4 - \frac{1}{b} \geq 0 \\ a^2 - ab - 3a^2b - ab + b^2 + 3ab^2 - 3a^2b + 3ab^2 + 9a^2b^2 = \\ = 4a^2b^2 + b^2 + 4ab \quad (1) \\ 3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 16 + \frac{1}{b^2} - \frac{8}{b} \quad | \cdot ab^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad a^2 - 6ab - 6a^2b + 6ab^2 + 5a^2b^2 = 0 \quad | : a \neq 0$$

$$a - 6b - 6ab + 6b^2 + 5ab^2 = 0$$

$$\begin{cases} b(2a+1) \geq 0 \\ \frac{1}{b} \leq 4 \\ 3ab^2 - b^2 + ab = 16ab^2 + a - 8ab \quad (1) \\ a - 6b - 6ab + 6b^2 + 5ab^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad +13ab^2 + b^2 + a - 9ab = 0$$

из (1) вычитаем (2):

$$8ab^2 - 5b^2 - 3ab + 6b = 0 \quad | : b \neq 0$$

$$8ab - 5b - 3a + 6 = 0$$

$$a(8b-3) = 5b-6$$

~~из (2) вычитаем~~

$$\exists b = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}$$

$$0 = \frac{15}{8} - 6$$

$$0 \neq \frac{15-48}{8} \Rightarrow b \neq \frac{3}{8}$$

$$a = \frac{5b-6}{8b-3}$$

$$\begin{cases} b\left(\frac{10b-12}{8b-3} + 1\right) \geq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{1}{b} \leq 4 \quad (1)$$

$$13b^2\left(\frac{5b-6}{8b-3}\right) + b^2 + \frac{5b-6}{8b-3} - 9b\left(\frac{5b-6}{8b-3}\right) = 0 \quad | \cdot (8b-3) \neq 0$$

$$(1) \quad \frac{1}{b} \leq 4$$

если $b < 0$, то $\frac{1}{b} \leq 4$ верно

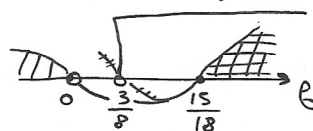
если $b > 0$, то $\frac{1}{b} \leq 4 \quad | \cdot b > 0$

$$4b \geq 1$$

$$b \geq \frac{1}{4}$$

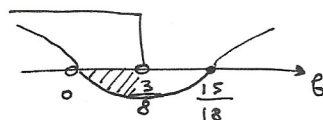
$$(2) \quad b\left(\frac{10b-12}{8b-3} + 1\right) \geq 0$$

если $8b-3 > 0$, то $b(10b-12+8b-3) \geq 0$
 $b > \frac{3}{8}$ $b(18b-15) \geq 0$



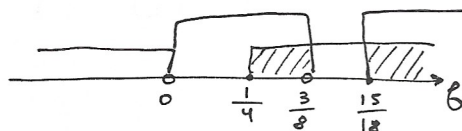
$$b \geq \frac{15}{18}$$

если $8b - 3 < 0$, то $b(10b - 12 + 8b - 3) \leq 0$
 $b < \frac{3}{8}$ $b(18b - 15) \leq 0$



$$b \in (0; \frac{3}{8})$$

$$\begin{cases} b < 0 \\ b \geq \frac{1}{4} \\ b \geq \frac{15}{18} \\ 0 < b < \frac{3}{8} \end{cases}$$



$$(1) \quad 13b^2(5b-6) + b^2(8b-3) + 5b-6 - 9b(5b-6) = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad 65b^3 - 78b^2 + 8b^3 - 3b^2 + 5b - 6 - 45b^2 + 54b = 0$$

$$73b^3 - 126b^2 + 59b - 6 = 0$$

$$b = 1 - \text{решение} \quad (1 > \frac{15}{18})$$

$$73b^2 - 53b + 6 = 0$$

$$D = 53^2 - 24 \cdot 73 = 1057$$

$$b = \frac{53 \pm \sqrt{1057}}{2 \cdot 73}$$

$$\sqrt{1057} > 32$$

$$\sqrt{1057} < 33$$

$$\frac{53 + \sqrt{1057}}{146} > \frac{85}{146} > \frac{3}{8}$$

$$\frac{53 + \sqrt{1057}}{146} < \frac{86}{146} < \frac{15}{18}$$

$$\Rightarrow b \neq \frac{53 + \sqrt{1057}}{146}$$

$$\frac{53 - \sqrt{1057}}{146} < \frac{21}{146} < \frac{15}{18} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow b \neq \frac{53 - \sqrt{1057}}{146}$$

$$\frac{53 - \sqrt{1057}}{146} > \frac{20}{146}$$

$$\frac{26}{146} < \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{146} < \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{5b-6}{8b-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 1 \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{5} \\ \operatorname{tg} y = 1 \\ \begin{cases} \frac{x}{4} \leq \operatorname{tg} y < \frac{3}{8} \\ \operatorname{tg} y \geq \frac{15}{18} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{5}) + \pi k \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad \text{где } k, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{5}) + \pi k \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$

§5.

$$60 + 4a - a^2 = 64 - (a-2)^2$$

$$0 < 64 - (a-2)^2 \leq 64$$

$\square$ x, y, z - стороны
треугольника
 h_1, h_2, h_3 - высоты

$$r = \frac{S}{p}$$

p - полупериметр

$$r = \frac{x \cdot h_1 \cdot \frac{1}{z}}{\frac{x+y+z}{z}} = \frac{y \cdot h_2 \cdot \frac{1}{z}}{\frac{x+y+z}{z}} = \frac{z h_3 \cdot \frac{1}{z}}{\frac{x+y+z}{z}}$$

r - наибольшее $\Rightarrow r^3$ - наибольшее

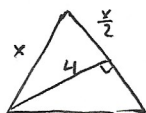
$$\frac{xyz \cdot \overbrace{h_1 h_2 h_3}^{\leq 64}}{(x+y+z)^3} - \text{наибольшее} \Rightarrow$$

$$64 = 4^3 \Rightarrow h_1 h_2 h_3 = 64$$

$$\frac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z} - \text{наибольшее}$$

$$\frac{\frac{xyz}{x+y+z}}{(x+y+z)^3} - \text{наибольшее}$$

$$\square h_1 = h_2 = h_3 = 4 \Rightarrow x = y = z$$



$$x^2 = \frac{x^2}{4} + 16$$

$$\frac{3x^2}{4} = 16$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{4 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3 \cdot 8}{\sqrt{3} \cdot 2}} = \frac{4}{3}$$

это случай с ~~самыми~~ высотами, каждая из которых максимальна (если мы будем увеличивать одну из высот, придется уменьшать другую) это приведет к тому, что треугольник будет более сплюснутым и радиус будет меньше)

Ответ: $\frac{4}{3}$

Чистовик

$$-a^2 + 4a + 60$$

$$64 - (a-2)^2 > 0$$



$$-(a-2)^2 + 64 \geq 0$$

$$(a-2)^2 < 64$$

$$-a^2 + 4a - 4 + 64 - 32 < a-2 < 32$$

$$-30 < a < 34$$

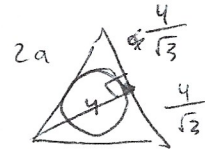
2

$$-(a-2)^2 \geq 0$$

$$0 \leq 64 - (a-2)^2 \leq 64$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2} - \max$$



$$4a^2 = a^2 + 16$$

$$3a^2 = 16$$

$$\sqrt{3}a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

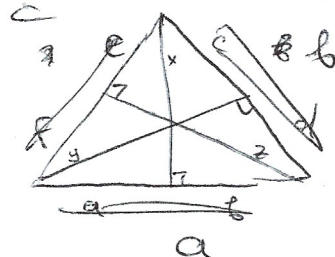
$$r = \frac{\frac{16}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right) - \max$$

$$\frac{16}{16} = 1$$

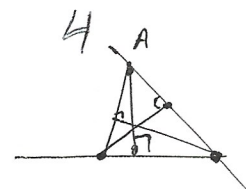
$$\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3} - \max$$

$$\frac{4 \cdot 4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}}$$

$$64 = 2^6 = (2^2)^3$$

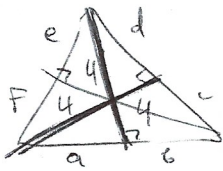


$$r = \frac{y \cdot \frac{1}{2}(c+d)}{p} - \max$$



$$0 < xyz \leq 64$$

$$xyz = \frac{1}{8} (a+b)(b+c)(c+a) - \max$$



$$\frac{\sqrt{(d+c)^2 - b^2} \sqrt{(a+b)^2 - c^2} \sqrt{(a+b)^2 - f^2}}{4(a+b+c+d+e+f)^3} \leq 64$$

$$(a+b)(c+d)(e+f)^3 - \max$$

$$\frac{(a+b)(c+d)(e+f)}{(a+b+c+d+e+f)} - \max$$

$$\frac{64 \cdot a^3 b^3 c^3}{(a+b+c)^3} - \max$$