МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Каменский Андрей Николаевич**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)\ ?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты AB2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1

$b_n(6)$

$$\begin{cases} \dfrac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4}=30; \\ \dfrac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4}=120 \end{cases}$$

$$\dfrac{b_5+b_6-b_2-b_1}{4}=90;$$

$$\begin{cases} \dfrac{b_1+b_4}{2}\cdot 4=120 \\ \dfrac{b_3+b_6}{2}\cdot 4=480 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1+b_4=60 \\ b_3+b_6=240. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_4=60 \\ b_2+b_5=150 \\ b_3+b_6=240 \end{cases}$$

$$b_1+b_3+b_4+b_6=300$$

$$\frac{b_1+b_3}{2}+\frac{b_4+b_6}{2}=150$$

$$b_2+b_5=150.$$

№1

$$b_1(1+q+q^2+q^3)=120$$

$$b_1(q^2+q^3+q^4+q^5)=480$$

$$(1+q+q^2+q^3)4=q^2(1+q+q^2+q^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q=\pm 2$$

$$b_1(1+2+4+8)=120$$

$$b_1=\frac{120}{15}=8 \Rightarrow b_4=b_1\cdot q^3=8\cdot 2^3=8^2=\boxed{64} \text{ (при } q=2)$$

$$b_1'=\frac{120}{1-2+4-8}=\frac{120}{-5}=-24 \Rightarrow b_4'=-24\cdot(-8)=192$$

Ответ: 64 или 192.

№2

$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)$ $\qquad\qquad$ 2π рад $= 360^\circ$

$2\sin\left(\frac{\pi x - 2x^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x + 2x^\circ}{2}\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x - 2x^\circ}{2} = \pi K \\ \frac{\pi x + 2x^\circ}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\pi x - 2x^\circ = 2\pi K, \; K \in Z \\ \pi x + 2x^\circ = \pi + 2\pi t, \; t \in Z\end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$x^\circ = \frac{2\pi}{360} x_{\text{рад}} \;\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\pi x - \frac{\pi}{90}x = 2\pi K \\ \pi x + \frac{\pi}{90}x = \pi + 2\pi t\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x - \frac{x}{90} = 2K \\ x + \frac{x}{90} = 1 + 2t\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\left(\frac{89}{90}\right) = 2K \\ x\left(\frac{91}{90}\right) = 1 + 2t\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}89x = 180K \\ 91x = 90 + 180t\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cancel{89x - 180K = 0} \\ \cancel{91x - 180t = 90}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{180}{89}K \\ x = \frac{90}{91} + \frac{180}{91}t\end{array}\right. ;$$

$\left|\frac{180}{89}K - \frac{90 + 180t}{91}\right| = \min = \alpha.$

$\left|\frac{180\cdot 91\cdot K - 90\cdot 89 - 180\cdot 89t}{91\cdot 89}\right| = \alpha.$

$\frac{90}{91\cdot 89}\left|\frac{182K - 89 - 178t}{\cancel{91\cdot 89}}\right| = \alpha.$

„Шаг" между $182K - 178t = 4$;

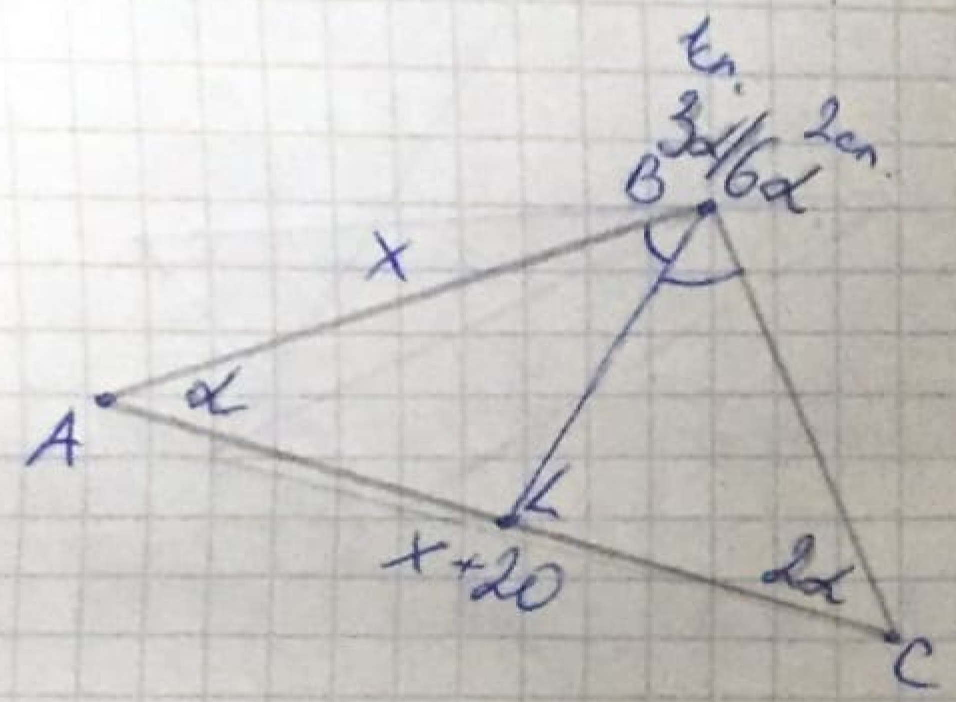
тк своб. член не дел. на 4 $\Rightarrow$ min расстояние

будет при $182K - 178t = 88$ $\left(|88 - 89| = \cancel{2} = 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{90}{91\cdot 89}\cdot 1 = \boxed{\frac{90}{91\cdot 89}}$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{90}{91\cdot 89}}$

№3



(1сл) $\angle B = 3\alpha$ (α - мин. угол. треуг $= \angle A$)

1) $180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C = \alpha + 3\alpha + 2\alpha = 6\alpha \; | \Rightarrow$

$| \Rightarrow \alpha = 180/6 = 30^\circ$

2) По т. синусов (сл-ю)

$$\frac{x}{\sin(2\alpha)} = 2R_{оп} = \frac{x+20}{\sin(3\alpha)} \; | \Rightarrow$$

$$| \Rightarrow \quad x \cdot \sin(90) = (x+20)\sin(60);$$

$$x = x\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\sqrt{3} \; | \Rightarrow$$

$$| \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad 40$$

По т. косинусов:

3) $BC = \sqrt{x^2 + (x+20)^2 - 2x(x+20)\cos\alpha}$;

$$BC^2 = \frac{1200}{(2-\sqrt{3})^2} + \frac{1600}{(2-\sqrt{3})^2} - 2\frac{20\sqrt{3}\cdot 40}{(2-\sqrt{3})^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC^2 = \frac{2800 - 20\cdot 40\cdot 3}{(2-\sqrt{3})^2};$$

$$BC^2 = \frac{400}{(2-\sqrt{3})^2};$$

$$BC = \frac{20}{(2-\sqrt{3})}$$

4) Пусть BL – биссектриса, тогда $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} : \frac{20}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$;

тогда $AL = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}(x+20) = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{40}{2-\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$$LC = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(x+20) = \frac{40}{\sqrt{3}-1}$$

5) $BL^2 = AB\cdot BC - AL\cdot LC = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{20}{2-\sqrt{3}} - \frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{40}{\sqrt{3}-1} =$

$$= \frac{400\sqrt{3}}{1}\left(\frac{4-2\sqrt{3} - 4(7-4\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}\right) =$$

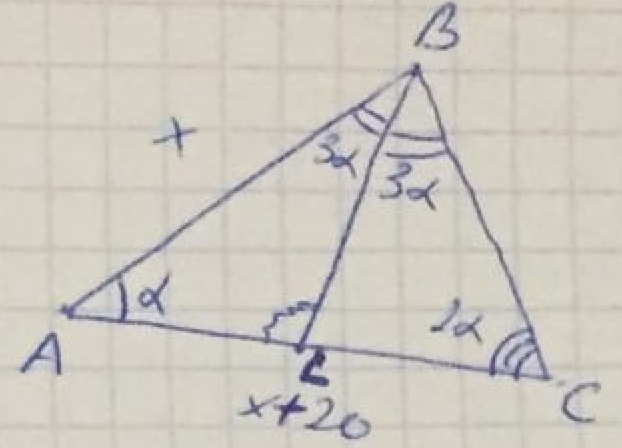
$$= 400\sqrt{3}\left(\frac{14\sqrt{3}-24}{28-16\sqrt{3}-14\sqrt{3}+24}\right) =$$

$$= 400\sqrt{3}\cdot\frac{14\sqrt{3}-24}{52-30\sqrt{3}} = 400\sqrt{3}\,\frac{12-7\sqrt{3}}{15\sqrt{3}-26}$$

1сл: $BL = 20\sqrt{\frac{12\sqrt{3}-21}{15\sqrt{3}-26}}$

2сл Второй способ решения (без формулы биссектрисы)

$180 = \alpha + 2\alpha + 6\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$



$\cancel{\frac{x}{\sin(40)} = \frac{x+20}{\sin(120)}}$;

$\cancel{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = x\sin(40) + 20\sin(40)}$

~~x =~~ 1) в $\triangle ABL$, $\angle L = 180 - 3\alpha - \alpha = 180^\circ - 60^\circ - 20^\circ = 100^\circ$

2) Для $\triangle ABC$:

$$\frac{x}{\sin(40)} = \frac{x+20}{\sin(120)} \Rightarrow x = \frac{20\cdot\sin(40)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(40)}$$

3) Для $\triangle ABL$:

$$\frac{AB}{\sin(\angle L)} = \frac{BL}{\sin(\angle A)};\quad BL = \frac{x\cdot\sin(20)}{\sin(100)} = \frac{20\cdot\sin(40)\sin(20)}{\left(\underset{\sin(60)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sin(40)\right)\cdot\sin 100} =$$

= ~~[illegible]~~

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{20}{1}\sqrt{\frac{12\sqrt{3}-21}{15\sqrt{3}-26}} \text{ или } \frac{20\cdot\sin(40)\cdot\sin(20)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(40)\right)\cdot\sin(100)}}$$

№4.

$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$

Заметим что при $x = -1$, ур-е не зависит от a, проверим, является ли $x = -1$ корнем:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 & x+1 \\ \underline{-\,3x^3 + 3x^2} & \overline{3x^2 + (3a+1)x - a + 2} \\ \quad (3a+1)x^2 & \\ \quad \underline{-\,(3a+1)x^2} & \\ \qquad (-a+2)x - a + 2 & \\ \qquad \underline{-\,(-a+2)x - a + 2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

, тогда:

$(x+1)\left(3x^2 + (3a+1)x + 2 - a\right) = 0$

$x = -1$ – первый целый корень $\Rightarrow$ надо $\begin{cases} D > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \in \text{цел} \\ x_2 \in \text{цел} \end{array}\right. \end{cases}$:

$3x^2+(3a+1)x+2-a=0$

$D=9a^2+6a+1-12(2-a)>0$

$9a^2+18a-23>0$

$D/4=81+207=288$

$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{288}}{9}$

+ − +

$a\in$

$-6\ -5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ a$

Пров: для $a=-6;-5;-4;-3,1;2;3;4;5$ (X) – не подх, (V) – подх

$a=$: $-6)$ $x_{1,2}=\dfrac{17\pm\sqrt{193}}{6}$ (X)

$-5)$ $x_{1,2}=\dfrac{14\pm\sqrt{112}}{6}$ (X)

$-4)$ $x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{49}}{6}=\dfrac{11\pm7}{6}=3;\ \dfrac{2}{3}$ (V)

$-3)$ $x_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{4}}{6}=\dfrac{8\pm2}{6}=1;\ \dfrac{10}{6}$ (V)

$1)$ $x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4}}{6}=\dfrac{-4\pm2}{6}=-1;\ -\dfrac{1}{3}$ (V)

$2)$ $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49}}{6}=0;\ \dfrac{-14}{6}$ (V)

$3)$ $x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{112}}{6}$ (X)

$4)$ $x_{1,2}=\dfrac{-13\pm\sqrt{193}}{6}$ (X)

$5)$ $x_{1,2}=\dfrac{-16\pm\sqrt{292}}{6}$ (X)

Итого нам подходят $a=-4;-3;1;2$, а всего Сергей ~~перебрает~~ перебирает 12 штук, тогда вероятность равна $\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}\approx0{,}33$

$\boxed{\text{Ответ: } \dfrac{1}{3}}$

N5

1) Наименьшее число букв А – это 8 : А·А·А·А·А·А·А·А

в этом слове вместо « · » можно ставить или „В" или „ВВ", но 7 ВВ много |=> 6 ВВ и 1В , итого 21 буква |=> 7 вариантов

2) Если букв А будет 9 , тогда „ВВ" должно быть 4 , а „В" также 4 => всего вариантов $C_8^4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70$

3) Если букв „А" – ~~...~~ 10, тогда „ВВ" должно быть 2 , а „В" – 7, всего вариантов $C_9^2 = \frac{9\cdot8}{2\cdot1} = 36$

4) Если букв „А" – 11 , а это наибольшее из возможных ~~...~~ кол-в „А", тогда „ВВ" = 0; „В" = 10 |=> 1 вариант.

Итого вариантов: 7 + 70 + 36 + 1 = 114

$\boxed{\text{Ответ: 114 слов}}$