



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Микитчак Иван Михайлович**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 17$.
Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.
2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 5. Высота, проведённая к гипотенузе, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 9. Найдите длину второго отрезка.
3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,58) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите длину третьего ребра, если известно, что она на 1 меньше длины диагонали этого параллелепипеда.
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 10x - 24$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

$$a = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32}}{2}$$

$$b = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$$

Запишем разности a и b :

$$a - b = \frac{-2\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10,32} + \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}$$

$$\text{Сделаем замену } \pi^2 - 2\pi + 10,32 = t.$$

Получаем, что если предположить, что

$$a - b > 0, \text{ то}$$

$$\sqrt{t+4\pi} + \sqrt{t-4\pi} > 2\pi.$$

Из соображений монотонности (левая

функция монотонно растет), единственный

корень уравнения $\sqrt{t+4\pi} + \sqrt{t-4\pi} = 2\pi$ есть

$$t = \pi^2 + 4 \text{ (можно } \sqrt{\pi^2+4\pi} + \sqrt{\pi^2-4\pi+4} = 2\pi \Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \pi + 2 + \pi - 2 = 2\pi \Leftrightarrow 2\pi = 2\pi, \text{ поскольку}$$

$$\pi + 2 > 0 \text{ и } \pi - 2 > 0). \text{ Тогда}$$

$$\sqrt{t+4\pi} + \sqrt{t-4\pi} > 2\pi \Leftrightarrow \pi^2 - 2\pi + 10,32 > \pi^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10,32 > 4 + 2\pi, \text{ но } 4 + 2\pi < 4 + 3,15 \cdot 2 =$$

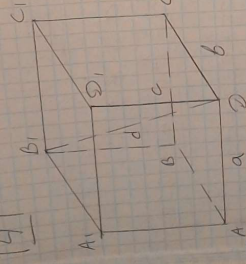
$$= 10,3, \text{ следовательно } 10,32 > 10,3, \text{ т.е.}$$

а следовательно больше b . Тогда ответ $\neg b$.

это
типично
а не
минус

$$\text{Ответ: } \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10,32}}{2}.$$

[4]



По условию

$$a+b=2020$$

$$ab=c$$

$$d^2=c^2+1$$

$$d^2=a^2+b^2+c^2,$$

т.е. a, b, c, d —

три стороны

параллелепипеда и

его диагональ соответственно (с — искома).

Последнее уравнение получено из теоремы

Пифагора для $\triangle BB_1D_1$, ~~т.е.~~ и для $\triangle ABD$, где

$$BB_1^2 + BD^2 = DB_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Получаем}$$

$$(c+1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 + 2c + 1 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c+1 = (a+b)^2 - 2ab = 2020^2 - 2c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{2020^2 - 1}{4} = \frac{4080400 - 1}{4} = 1020099,75.$$

Ответ: 1020099,75.

[5]

$$\begin{aligned} x^2 - 2,58 - \frac{\pi}{2} + \pi x &= 2\pi k \\ x^2 - 2,58 + \frac{\pi}{2} - \pi x &= \pi + 2\pi k \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32}}{2} \quad (1) \\ x &= \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32}}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Заметим, что в множестве корней (1) положительные являются только

$$x = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32}}{2}$$

Эти корни положительные при

$$\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32} > \pi \Leftrightarrow 2\pi + 8\pi k + 10,32 > 0$$

$$\Leftrightarrow k > -\frac{10,32}{8\pi} - \frac{1}{4} \quad \text{С учетом } k \in \mathbb{Z},$$

получаем $k > -1$. Имеет наименьшее положительное решение из множества (1)

— при $k = 0$.

Рассмотрим множество корней (2), разделив его на 2 случая:

$$x = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32}}{2} \quad (2.1)$$

$$x = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32}}{2} \quad (2.2)$$

(2.1) положителен всегда, если определен

$\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32}$, т.е. если

$$4\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -1$$

с учетом $k \in \mathbb{Z}$.

(2.2) положителен, если

$$\begin{cases} \pi > \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32} \Leftrightarrow 2\pi + 8\pi k + 10,32 < 0 \\ \pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 10,32 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\pi \leq 2\pi + 8\pi k + 10,32 < 0 \Leftrightarrow -2 < k < 0$$

(с учетом $k \in \mathbb{Z}$), т.е. $k = -1$.

Заметим, что (2.1) не меньше $\frac{\pi}{2}$, можно больше $\frac{\pi}{2}$, т.к.

$$\pi^2 + 2\pi - 8\pi + 10,32 \neq 0$$

Поэтому остаётся сравнить (1) при $k = 0$ и (2.2) при $k = -1$ (назовем эти величины α и β соответственно). Имеем

Полтаем площадь двумя способами.

$$p_2 = \frac{1(9+6)}{2} \Rightarrow 10p = 3\sqrt{1}(l+g)$$

Известный факт, что $I A_1 C B_1$ - квадрат. ~~Векторное равенство $\vec{IA_1C} = \vec{IB_1A_1}$~~
(Она прямоугольник, тк при угле в нем угле прикине, но $B_1 I = I A_1 = 2$). Тогда

$B_1 I = B_1 C = C A_1 = 2$ ($B_1 C = C A_1$, тк это касательные к одной окружности, проведенные из одной точки). Но $B_1 C$ равен $p - (3+6)$. Тогда $2 = p - (9+6) \Rightarrow p = 7+9+6$. Тогда

$$10p = 10(14+6) = 3\sqrt{1}(l+g) \Rightarrow (\sqrt{1} = x)$$

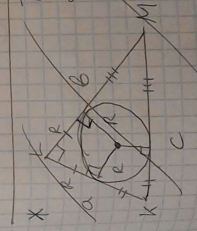
$$\Rightarrow 140 + 10x^2 = 3x^3 + 27x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 10x^2 + 27x - 140 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)(3x^2 + 2x + 35) = 0.$$

Заметим, что в $3x^2 + 2x + 35$ отрицательный дискриминант ($4 - 420 < 0$), т.е. 4 - единственный корень. Тогда $l = 4^2 = 16$.

Пусть p, a, b, c, R - радиусы, стороны и радиус вписанной окружности $\triangle KLM$ соответственно.



Из равенства касательных, проведенных из одной точки $B_1 C = C A_1$, $A_1 B = B C_2$, $A B_1 = A C_2$. Тогда

$$B_1 C = p - A B_1 = A C_2 - C_2 B = p - A B_1 = \frac{p - A B_1}{1} = \frac{p - A B_1}{1}$$

$$p = B_1 C + A C_2 + C_2 B = \frac{p - A B_1}{1} + \frac{p - A B_1}{1} + \frac{p - A B_1}{1}$$

$$\text{Ответ: } l = 16.$$

3

$$\sin(x^2 - 2,58) = \cos(\pi x) \Leftrightarrow \sin(x^2 - 2,58) - \cos(\frac{\pi}{2} - \pi x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(\frac{x^2 - 2,58 - \frac{\pi}{2} + \pi x}{2}) \cos(\frac{x^2 - 2,58 + \frac{\pi}{2} - \pi x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\frac{x^2 - 2,58 - \frac{\pi}{2} + \pi x}{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos(\frac{x^2 - 2,58 + \frac{\pi}{2} - \pi x}{2}) = 0$$

Вариант 4-2

1

По условию, если

$$b_1 = b_1 + d(c-1),$$

$$2d^2 d - разность:$$

$$b_1 = b_1 + d(b_2 - 1) = b_1 + d^2 - d =$$

$$= b_1 + d(b_1 + d) - d = b_1 + d^2 + d(b_1 - 1) = 17$$

$$\Rightarrow d^2 = 17 - b_1. C \text{ утвтом } d > 0$$

($\{b_1\}$ возрастает):

$$d = \sqrt{17 - b_1} = 4.$$

Площа

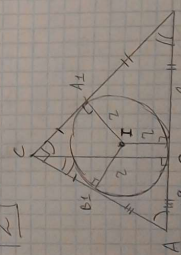
$$b_{13} = b_{13} = b_{33} = 1 + 3 \cdot 4 = 129$$

Ответ. 129.

$$* b_3 = 1 + 4 \cdot 2 = 9, b_9 = 1 + 4 \cdot 8 = 33.$$

2

Обозначим за p, r, l, h периметр треугольника, радиус вписанной окружности и длину известного отрезка и высоту, проведенную к гипотенузе соответственно.



$\angle BCC \perp \angle AIC = \angle BIC$ Из подобия (по $\angle CAC =$

$$\frac{g}{h} = \frac{h}{l} \Rightarrow h^2 = gl.$$