



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бекян Артём Сергеевич**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a + 4)x^2 + (2a + 3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АВВА, АВАВАВА, АВВАВВВА являются допустимыми, а слова АВВАВ, АВААВА, АВВВВА – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Обозначим последовательность за $b_1, \dots, b_6$, где $b_n = b_1 q^{n-1}$. Тогда из условия

$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4} = 30 \\ \frac{b_3 + b_4 + b_5 + b_6}{4} = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3}{4} = 30 \\ \frac{b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5}{4} = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b_1(1+q+q^2+q^3)}{4} = 30 & (1) \\ \frac{b_1 q^2(1+q+q^2+q^3)}{4} = 120 & (2) \end{cases}$$

Поделим (2) на (1).

Получим

$$q^2 = 4, \text{ (т.к. при } b_1 = 0 \text{)}$$

(1)=0 и (2)=0, что противоречит условию, аналогично при $1+q+q^2+q^3=0$

$$q^2 = 4 \quad \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases}$$

1сл. $q = 2$

$$1+q+q^2+q^3 = 1+2+4+8 = 15$$

$$\begin{cases} \frac{15b_1}{4} = 30 \\ \frac{4b_1 \cdot 15}{4} = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 8 \\ b_1 = 8 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } b_4 = b_1 q^3 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$\begin{cases} \frac{-5b_1}{4} = 30 \\ \frac{-5 \cdot 4b_1}{4} = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = -24 \\ b_1 = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-5b_1}{4} = 30 \\ \frac{-5 \cdot 4b_1}{4} = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = -24 \\ b_1 = -24 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } b_4 = b_1 q^3 = -24 \cdot (-8) = 24 \cdot 8 = 192$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} b_4 = 64 \\ b_4 = 192 \end{cases}$$

$$2x^\circ \rightarrow \frac{2x\pi}{180} \text{ рад.}$$

$$\sin(\pi x) - \sin\left(\frac{x\pi}{90}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x - \frac{x\pi}{90}}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x + \frac{x\pi}{90}}{2}\right) = 0$$

$$\text{1сл. } \frac{\pi x - \frac{x\pi}{90}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{180n}{89}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{2сл. } \frac{\pi x + \frac{x\pi}{90}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{90 + 180k}{91}, k \in \mathbb{Z}$$

При $n=0, k=0$ расстояние между корнями $(0 \text{ и } \frac{90}{91})$ равно $\frac{90}{91}$

При увеличении n и k на единицу расстояние между корнями $(\frac{180}{89} \text{ и } \frac{270}{91})$ уменьшится по сравнению с предыдущим на $\frac{180}{89} - \frac{180}{91}$ и т.д.

Надо найти минимум.

$$\left| \frac{90}{91} - \left(\frac{180}{89} - \frac{180}{91} \right) k \right|, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left| \frac{90}{91} - \left(\frac{180}{89} - \frac{180}{91} \right) \right| = \left| \frac{90}{91} - \left(\frac{180K \cdot 91 - 180K \cdot 89}{89 \cdot 91} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{90 \cdot 89 - 180K \cdot 91 + 180K \cdot 89}{89 \cdot 91} \right| =$$

$$= \left| \frac{90}{91} \cdot 1 - \frac{180 \cdot 2K}{89 \cdot 91} \right| = \left| \frac{90}{91} \left(1 - \frac{4K}{89} \right) \right| \rightarrow \min, \\ K \in \mathbb{Z}$$

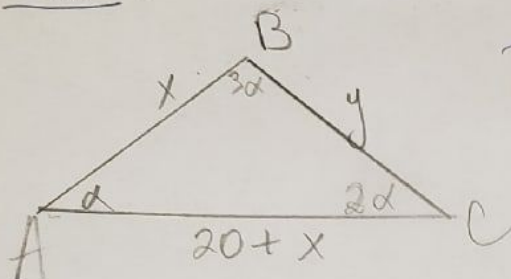
Тогда $K=22$, т.е.

наименьшее расстояние равно

$$\left| \frac{90}{91} \left(1 - \frac{88}{89} \right) \right| = \frac{90}{91} \cdot \frac{1}{89} = \frac{90}{91 \cdot 89}$$

Ответ: $\frac{90}{91 \cdot 89}$

В данной задаче $\sqrt{3}$.
1 ал.



Тогда AC - наибольшая сторона, AB - 2-я по размеру. $AB = x$, $AC = 20 + x$, $BC = y$. $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$, т.е.

$$6\alpha = 180^\circ, \alpha = 30^\circ$$

Из теоремы синусов

$$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \frac{20+x}{1} = \frac{x \cdot 2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{20+x}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha}$$

$$20+x = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$(20+x)\sqrt{3} = 2x \quad 2x - x\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \quad x(2-\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}$$

$$x = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

Тогда заметим, что $3\alpha = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - прямоугольный. $\angle A = 30^\circ$,

$$\angle B = 90^\circ, \angle C = 60^\circ \Rightarrow AC = 2BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{2} \left(\frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + 20 \right) = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + 10 = \frac{20}{2-\sqrt{3}}$$

Пусть l - искомое. Тогда из формулы

$$l = \frac{2AB \cdot BC \cos 45^\circ}{AB + BC}$$

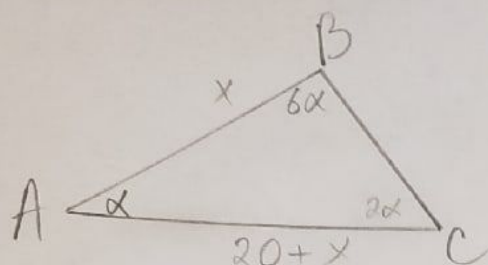
$$l = \frac{\frac{40\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{20}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{20}{2-\sqrt{3}}} \quad \text{размножим на } 2-\sqrt{3}$$

$$l = \frac{40\sqrt{3} \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{(20\sqrt{3} + 20)(2-\sqrt{3})}$$

$$l = \frac{40\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$l = \frac{20\sqrt{6}}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3} = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 1}$$

2a1.



В данном случае

$$\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

$$9\alpha = 180^\circ \quad \alpha = 20^\circ$$

Из Т. синусов

$$\frac{x+20}{\sin 6\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha}, \text{ а т.к. } \alpha = 20^\circ$$

$$\frac{(x+20)2}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sin 40^\circ}$$

$$\sin 40^\circ (x+20) = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$20 \sin 40^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2} - x \sin 40^\circ$$

$$x = \frac{20 \sin 40^\circ \cdot 2}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}$$

Из Т. синусов

$$\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{BC}{\sin 20^\circ}$$

$$BC = \frac{x \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$BC = \frac{x}{2 \cos 20^\circ}$$

$$BC = \frac{20 \sin 40^\circ}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right) 2 \cos 20^\circ}$$

$$BC = \frac{20 \sin 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}$$

из ф-лы Сус.

$$l = \frac{2x BC \cos 60^\circ}{x + BC}$$

$$l = \frac{2 \frac{20 \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ} - \frac{20 \sin 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{20 \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ} + \frac{20 \sin 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}}$$

Dawweesumme
hea
 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ$

$$l = \frac{20 \cdot \sin 40^\circ \cdot 20 \sin 20^\circ}{(20 \sin 40^\circ + 20 \sin 20^\circ) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ \right)}$$

$$l = \frac{\sin 40^\circ \cdot 20 \sin 20^\circ}{(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ \right)}$$

$$l = \frac{20 \sin 40^\circ}{(2 \cos 20^\circ + 1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ \right)}$$

$$l = \frac{20 \sin 40^\circ}{2(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 40^\circ)}$$

$$l = \frac{20 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cdot 2 \sin 10^\circ \sin 50^\circ}$$

$$l = \frac{10 \sin 20^\circ}{2 \cos 40^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ}$$

$$l = \frac{10 \cos 10^\circ}{\cos 40^\circ \sin 50^\circ}$$

$$l = \frac{10 \cos 10^\circ}{\frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin 10^\circ)}$$

$$l = \frac{20 \cos 10^\circ}{1 + \sin 10^\circ}$$

Orbet: $\frac{20 \cos 10^\circ}{1 + \sin 10^\circ}$ mm $\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$

$$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$$

$$(x+1)(3ax - a + 3x^2 + x + 2) = 0$$

$x = -1$ - всегда корень. Осталось понять, когда $3x^2 + x + 3ax - a + 2 = 0$ имеет целый корень

$$3x^2 + x(1+3a) - (a-2) = 0$$

$$D = 9a^2 + 6a + 1 + 12(a-2) = 9a^2 + 6a + 1 + 12a - 24 = 9a^2 + 18a - 23$$

$$x = \frac{-1-3a \pm \sqrt{9a^2 + 18a - 23}}{6}$$

Остальное проверить, когда $\sqrt{D}$ - целый.
Подставим разные значения a

$$a = -6 \quad D = 193 \ominus$$

$$a = -5 \quad D = 112 \ominus$$

$$a = -4 \quad D = 49 \oplus \Rightarrow \sqrt{D} = 7$$

$$a = -3 \quad D = 4 \oplus \Rightarrow \sqrt{D} = 2$$

$$a = -2 \quad D = -23 \ominus$$

$$a = -1 \quad D = -32 \ominus$$

$$a = 0 \quad D = -23 \ominus$$

$$a = 1 \quad D = 4 \oplus \Rightarrow \sqrt{D} = 2$$

$$a = 2 \quad D = 49 \oplus \Rightarrow \sqrt{D} = 7$$

$$a=3 \quad D=112 \ominus$$

$$a=4 \quad D=193 \ominus$$

$$a=5 \quad D=292 \ominus$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $a \in \{1; 2; -4; -3\}$ (в остальных случаях D — не полный квадрат, т.е. $\sqrt{D}$ — иррациональное число).

$$\underline{a=-4} \Rightarrow x = \frac{-1+12 \pm 7}{6} \quad x = \frac{11 \pm 7}{6},$$

$$\begin{cases} x=3 \in \mathbb{Z} \\ x=\frac{2}{3} \end{cases} \quad (+)$$

$$\underline{a=-3} \Rightarrow x = \frac{-1+9 \pm 2}{6} \quad x = \frac{8 \pm 2}{6} \quad \begin{cases} x=\frac{5}{3} (+) \\ x=1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\underline{a=1} \Rightarrow x = \frac{-1-3 \pm 2}{6} \quad x = \frac{-4 \pm 2}{6} \quad \begin{cases} x=-1 \in \mathbb{Z} \\ x=-\frac{1}{3}, \end{cases}$$

но -1 — уже корень, т.е. при $a=1$ корни только -1 и $-\frac{1}{3} \Rightarrow$ только 1 целый $\ominus$

$$\underline{a=2} \Rightarrow x = \frac{-1-6 \pm 7}{6} \quad x = \frac{-7 \pm 7}{6} \quad \begin{cases} x=0 \in \mathbb{Z} \\ x=-\frac{7}{3} (+) \end{cases}$$

Таким образом подходят $a \in \{-4; -3; 2\}$
т.е. 3 из 12 возможностей. Тогда вероят-
ность $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ Ответ: $\frac{1}{4}$

№5.

Заметим, что есть три "блока" - "A", "B" и "BB".
Блоками "A" слово начинается и заканчивается, к тому же после любого из блоков "B" и "BB" идет блок "A" (а также перед).
Таким образом, в зависимости от к-ва блоков "B" и "BB" меняется к-во слов. При этом блоки "A" располагаются определенным образом. Тогда рассмотрим все возможные варианты к-ва блоков "B" и "BB".

1сл.

АВАВАВАВАВАВАВАВАВАВАВА

11 - "A" 10 - "B" 0 - "BB"

$$\text{к-во способов} : \frac{(10+0)!}{10! \cdot 0!} = \frac{10!}{10!} = 1$$

Теперь заметим, что блок "BB" в 2 раза больше блоков "A" и "B". Таким образом, если мы хотим добавить некоторое к-во, то придется заметить либо "AB" → "BB", либо "BA" → BB, но в любом из этих случаев либо будет 3 буквы "B" подряд, либо слово начнется или закончится буквой "B". Проверим на практике:

Здравствуйте!

Сегодня были выложены технические баллы ПВГ по математике, однако своего имени я там не нашел. Возможно, это связано с тем, что я начал отправлять решения в 15:20, после завершения олимпиады. Отмечу, что при этом **я спрашивал проктора, он созвонился с организатором и сообщил, что у нас будет 15 минут после конца олимпиады, чтобы все отправить**. Поэтому сразу после окончания олимпиады я начал фотографировать и отправлять работу. Не знаю, во сколько она дошла, потому что интернет у нас медленный, однако в озвученные проктором 15 минут я уложился. В связи с этим прошу проверить мою работу с учетом приложенной апелляции:

1 задача.

Мое решение почти полностью совпадает с решением жюри, ответ получен верный. Прошу зачесть за задачу максимальный балл.

2 задача.

Мое решение отличается от решения жюри, однако является альтернативно верным, при этом получен правильный ответ. Прошу зачесть за задачу максимальный балл.

3 задача.

Первый случай разобран полностью, мое решение отличается от решения жюри, является альтернативно верным, получен верный ответ (если домножить полученную мной дробь на корень из трех, а потом заменить $3 - \sqrt{3}$ на $6 / (3 + \sqrt{3})$, то ответ совпадет с ответом жюри. Поскольку это является лишь чередой преобразований, мой ответ совпадает с ответом жюри). Прошу зачесть за этот случай максимальный балл.

Во втором случае у меня правильное решение, однако при доведении до ответа я описался, написав синус 50 градусов вместо косинуса. Если принять это во внимание, то далее у меня бы все сократилось (путем таких же преобразований, что и в моем решении, получилось бы $(10 * \cos(10)) / ((1/2) * (\cos(90) + \cos(10)))$, что равно $20 * \cos(10) / (0 + \cos(10))$, то есть 20). Что это именно описка, а не ошибка, говорит мое решение второй задачи, так как там я использовал правильную формулу разности синусов. Прошу зачесть за этот случай максимальный балл.

Таким образом, прошу зачесть за задачу максимальный балл, поскольку оба случая разобраны верно.

4 задача.

Мое решение немного отличается от решения жюри, однако является верным, при этом получен правильный ответ. Прошу зачесть за задачу максимальный балл.

5 задача.

Мое решение отличается от решения жюри, однако по своей сути является почти полным перебором (с объединением случаев в группы и перебором этих групп), поэтому является верным. При этом получен правильный ответ. Прошу зачесть за задачу максимальный балл.

С уважением, Артём Бекян.