



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Халин Алексей Владиславович**

Технический балл: **100**

Дата: **1 марта 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 5-1

1. Уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ имеет корни a и b . Найдите численное значение выражения $5a^3 + 2b^5 - 7ab$.
2. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E . Найдите BC , если $AB : AC = 3 : 2$ и $CE = 3$.
3. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 4} \cdot \log_2(4 - y) = x, \\ \sqrt{y^2 - 2y + 4} \cdot \log_2(4 - z) = y, \\ \sqrt{z^2 - 2z + 4} \cdot \log_2(4 - x) = z. \end{cases}$$

4. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{16x^2}{\pi^2} + 100 \cos^2 x + \frac{625\pi^2}{x^2} + 3 \sin^7 x$$

и укажите все значения аргумента x , в которых оно достигается.

5. На столе для бильярда, имеющего форму параллелограмма с углом при вершине 173° , у середины одного из бортов находится единственный шар, по которому игрок наносит сильный удар под углом 1° к борту. Может ли при каких-либо размерах бильярдного стола случиться, что выпущенный шар после нескольких отскоков от бортов вернётся в прежнюю точку? При отскоке угол падения равен углу отражения.

февраль-март 2020 г.

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = \sqrt{5}$$

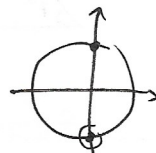
$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$ab = -1$$

$$\frac{1-5}{4} = -1$$

$$\sqrt{(x-1)^2+3} \log_2(4-y)=x \quad x,y,z \leq 4$$

$$x, y, z \leq 4$$



$$f(x) = \left(\frac{4x}{\pi} + \frac{25\pi}{x} \right)^2 - 200 + 100\omega_s^2 x + 3\sin^2 x$$

$$g(x) = \frac{4x}{\pi} + \frac{25\pi}{x} = 0$$

$$g'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{25\pi}{x^2} = 0$$

$$4x^2 + 25\pi^2 = 0$$

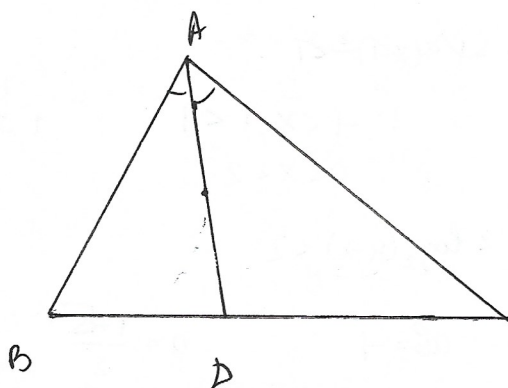
$$\frac{4}{\pi} = \frac{25\pi}{x^2}$$

$$x \approx -\frac{5\pi}{2}$$

$$x^2 \in \frac{25\pi^2}{4}$$

$$f(x) = (-10 - 10)^2 = 200 + 0 - 3 = \boxed{197}$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{2}$$

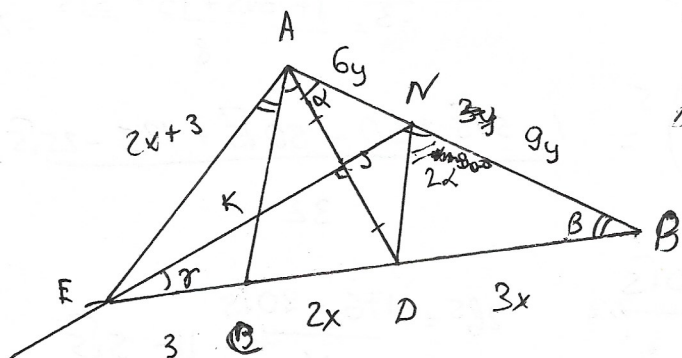


$$ES \cdot AD = AH \cdot LE$$

$$\frac{BN}{NA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CE}{BE} = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2x+3}{3} \cdot \frac{3}{5x+3} = 1$$

c $6x + 9 = 10x + 6$



$$AB:AC = 3:2$$

$$3 = 4x$$

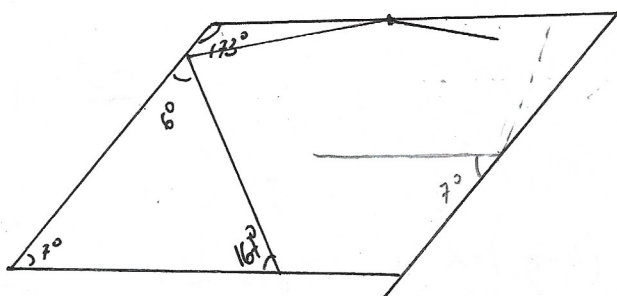
$$x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1 \quad \begin{matrix} x = -4 \\ BC = 5x = \frac{15}{4} \end{matrix}$$

$$\frac{2x+3}{3} \cdot \frac{CK}{KA} = 1 \quad \frac{CK}{AK} = \frac{3}{2x+3}$$

$$3KA = (2x+3) \subset K$$

Черновик



$$ab = -1$$

$$a+b=1$$

$$a^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 1$$

$$a^2 + b^2 = 3$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + 3} \log_2(4-y) = x \\ \sqrt{(y-1)^2 + 3} \log_2(4-z) = y \\ \sqrt{(z-1)^2 + 3} \log_2(4-x) = z \end{cases}$$

$$0 < x, y, z < 3$$

$\mathbb{R}$

$$x \geq 3 \Rightarrow z < 0$$

$$y > 4 \downarrow$$

$$0 < \log_2(4-x) < 2$$

$$\sqrt{3} < \sqrt{(z-1)^2 + 3} < \sqrt{7}$$

$$0 < ab < 2\sqrt{7}$$

$$x < 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 3} < 1$$

$$-1 < x-1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

$$14641$$

$$15101051$$

$$5a^3 = 10 + 5\sqrt{5} \quad 1 < \log_2(4-x) < 2$$

$$x > 2$$

$$ab = -1$$

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a^3 = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8} = 2 + \sqrt{5}$$

$$b^5 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 = \frac{1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5}}{32}$$

$$= \frac{176 - 80\sqrt{5}}{32}$$

$$2b^5 = \frac{176 - 80\sqrt{5}}{16} = 11 - 5\sqrt{5}$$

$$3a^3 + 2b^5 - 7ab = 10 + 5\sqrt{5} + 11 - 5\sqrt{5} + 7 \cdot \boxed{28} \quad \text{Черновик}$$

$$x > 2$$

$$\log_2(4-x) < 1$$

$$(z-1)^2 + 3 > z^2$$

$$\log_2(4-z) > 1$$

$$z^2 - 2z + 4 > z^2$$

$$z < 2$$

$$\cancel{x, y, z \leq 2.}$$

$$(y-1)^2 + 3 < y^2$$

$$y^2 - 2y + 4 < y^2$$

$$y > 2$$

$$\log_2(4-y) < 1$$

$$(x-1)^2 + 3 > x^2$$

$$-2x + 4 > 0$$

$$x < 2 \quad \text{т.к. } x > 2 \text{ не выполн.}$$

$$\underline{x, y, z \leq 2.}$$

$$\hookrightarrow x < 2 \Rightarrow \log_2(4-x) > 1$$

$$(z-1)^2 + 3 < z^2$$

$$-2z + 4 < 0$$

$$z > 2 \Rightarrow \log_2(4-z) < 1$$

$$(y-1)^2 + 3 > y^2$$

$$-2y + 4 > 0$$

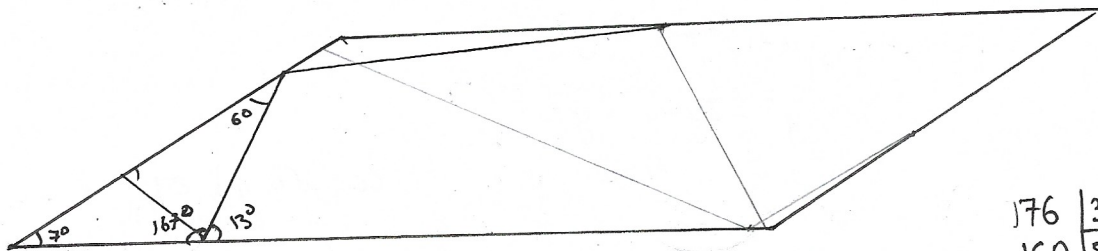
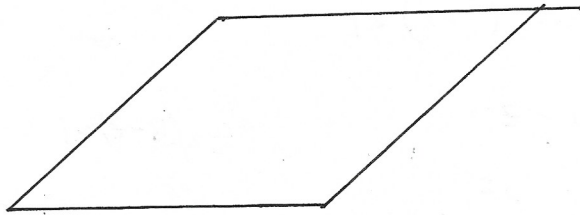
$$y < 2 \Rightarrow x > 2 \quad \text{т.к. } x < 2 \text{ не выполн.}$$

$$\underline{x, y, z \geq 2.}$$

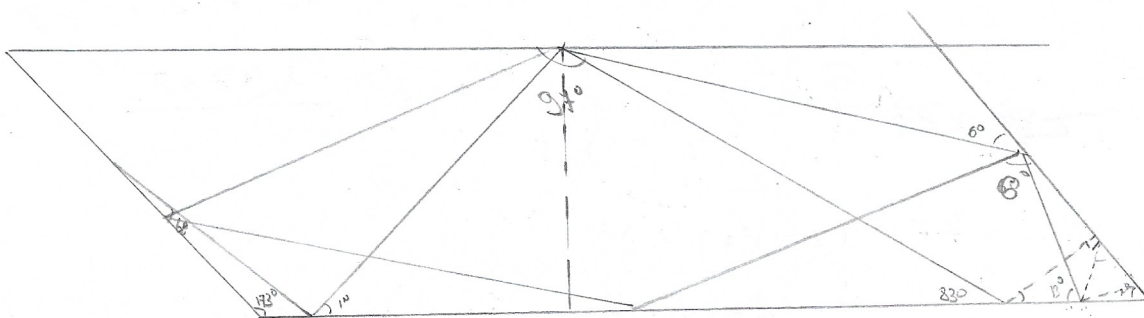
$$\begin{cases} x, y, z \leq 2. \\ x, y, z \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = y = z = 2.}$$

ед. реш.

Черновики



$$\begin{array}{r} 176 \overline{) 32} \\ 160 \overline{) 5,5} \\ 160 \end{array}$$



$$\begin{aligned} (1^\circ) &\xrightarrow{173^\circ} 6^\circ \xrightarrow{7^\circ} 167^\circ (13^\circ) \xrightarrow{7^\circ} 160^\circ (20^\circ) \xrightarrow{7^\circ} 27^\circ \rightarrow \\ &\Rightarrow 35^\circ \rightarrow 41^\circ \rightarrow 48^\circ \rightarrow 55^\circ \rightarrow 62^\circ \rightarrow 69^\circ \rightarrow 76^\circ \rightarrow \\ &\rightarrow 83^\circ \rightarrow 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 &= \frac{1 + 5\sqrt{5} + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5\sqrt{5} + 5 \cdot 25 + 1 \cdot 25\sqrt{5}}{32} = \\ &= \frac{176 + 80\sqrt{5}}{32} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{8} = 2 - \sqrt{5}$$

Чистовик.

№1.

Найдем корни уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1^2 - 4(-1) = 5; \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Если } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \text{то}$$

$$5a^3 = 5 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 5 \cdot \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5}}{8} = 5(2+\sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5};$$

$$2b^5 = 2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 = 2 \cdot \frac{1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5}}{32} =$$

$$= \frac{176 - 80\sqrt{5}}{16} = 11 - 5\sqrt{5};$$

$$ab = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1;$$

$$\text{тогда } 5a^3 + 2b^5 - 7ab = 10 + 5\sqrt{5} + 11 - 5\sqrt{5} - 7(-1) = 28.$$

$$\text{Если же } a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{то}$$

$$5a^3 = 10 - 5\sqrt{5}; \quad 2b^5 = 11 + 5\sqrt{5}; \quad ab = -1;$$

$$5a^3 + 2b^5 - 7ab = 10 - 5\sqrt{5} + 11 + 5\sqrt{5} - 7(-1) = 28.$$

Ответ: 28.

№2.

По свойству биссектрисы AD: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$.При этом из $AB:AC = 3:2 \Rightarrow AB > AC$.Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = \beta$, $AC = 2y$, $DC = 2x$,
тогда $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $AB = 3y$, $BD = 3x$. $\angle ADC = \alpha + \beta$ как внешний к углу $\angle ADB$ в $\triangle ABD$.
Определим дополнительные точки E.Пусть S - середина AD, тогда $ES \perp AD$.В таком случае ES - биссектриса $\angle AED$ в $\triangle AED$.

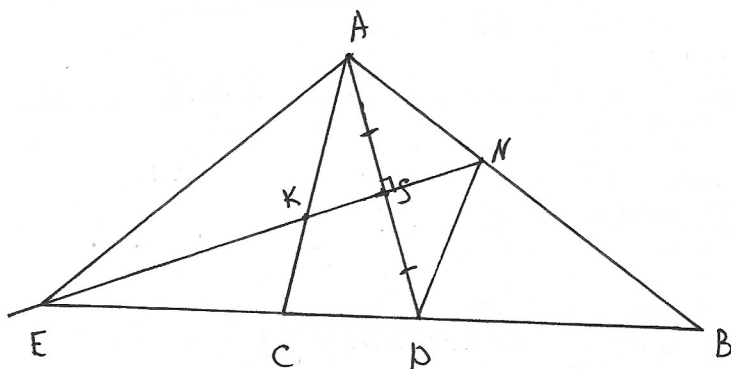
A

Чистовик.

Действительно, из $\triangle ESD$ и $\triangle ESA$ следует
 ES в $\triangle AED$ - медиана и высота, а значит
 $\triangle AED$ - равнобедренный, $AE = ED$, ES - биссектриса.

Из $\triangle ESD$: $\angle SED = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \alpha - \beta$, тогда
 $\angle AED = 2\angle SED = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$.

При этом из $\triangle ABC$: $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - \beta > 180^\circ - 2\alpha - 2\beta =$
 $= \angle AED$. Значит, точка E лежит на луче
 BC за точкой C .



Пусть $ES \cap AC = K$
 и $ES \cap AB = N$.

По теореме Менелая
 для $\triangle ACD$ и прямой
 ES :

$$\frac{AS}{SD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1.$$

При этом $AS = SD$, $DE = 2x+3$, $EC = 3 \Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{3}{2x+3}$.

Проведем DN . В $\triangle AND$ NS - высота и медиана,
 значит и биссектриса, $\angle DNS = \angle ANS = 90^\circ - \angle BAD = 90^\circ - \alpha$.

При этом $\angle BNS = 180^\circ - \angle ANS = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$.

Тогда $\angle BND = \angle BNS - \angle DNS = 90^\circ + \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha = \angle BAC$,
 в таком случае $ND \parallel AC$.

По теореме о пропорциональных отрезках для
 угла $\angle ABC$ и $ND \parallel AC$ верно $\frac{BN}{AN} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{2}$.

По теореме Менелая для $\triangle BAC$ и прямой EN :

$$\frac{CK}{AK} \cdot \frac{AN}{BN} \cdot \frac{BE}{CE} = 1.$$

Чистовик.

При этом $BE = 5x+3$, $\frac{AN}{BN} = \frac{2}{3}$, $\frac{CK}{AK} = \frac{3}{2x+3}$,

тогда

$$\frac{3}{2x+3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5x+3}{3} = 1, \quad \text{откуда}$$

$$10x+6 = 6x+9,$$

$$4x = 3,$$

$$x = \frac{3}{4},$$

$$BC = 5x = \frac{15}{4}.$$

Ответ: $\frac{15}{4}$.

н 3.

Заметим, что система инвариантна относительно замены $(x; y; z) \rightarrow (y; z; x)$ и замены $(x; y; z) \rightarrow (z; x; y)$.

Тогда, если найти некоторое ограничение для возможных значений переменной x , то это ограничение так же будет накладываться на переменные y и z .

Предположим, $x \leq 0$. ~~Поскольку на ОДЗ $\sqrt{x^2 - 2x + 4} \geq 0 \forall x$, то из 1 уравнения системы следует $\log_2(4-y) \leq 0$, значит $4-y \leq 1$ и $y \geq 3$.~~

Тогда $\log_2(4-x) \geq 2$. При этом $(2z-4z)$
 $\sqrt{z^2 - 2z + 4} = \sqrt{(z-1)^2 + 3} \geq \sqrt{3}$. Тогда в левой части 3-го уравнения выражение $\geq 2\sqrt{3}$, в таком случае $z \geq 2\sqrt{3}$. Но если $z \geq 2\sqrt{3}$, то $\sqrt{(z-1)^2 + 3} > \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2 + 3} = 2$, значит, в левой части того же уравнения выражение больше 4, значит $z > 4$, что не удовлетворяет ОДЗ ($z \log_2(4-z)$). Значит, $x > 0$, тогда $y > 0$ и $z > 0$.

Предположим теперь $x \leq 2$. Тогда $\log_2(4-x) > 1$.

Если $\sqrt{z^2 - 2z + 4} \geq 2$, то $\sqrt{z^2 - 2z + 4} \cdot \log_2(4-x) > 2$.

Тогда необходимо $\sqrt{z^2 - 2z + 4} < 2$; иначе равенство $\sqrt{z^2 - 2z + 4} \cdot \log_2(4-x) = 2$ не выполнится.

Чистовик.

Так как $z > 0$, то

$$\sqrt{z^2 - 2z + 4} < z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 < z^2$$

$$4 < 2z \Rightarrow z > 2.$$

Тогда $\log_2(4-z) < 1$.Если $\sqrt{y^2 - 2y + 4} \leq y$, то $\sqrt{y^2 - 2y + 4} \cdot \log_2(4-z) < y$.

Значит, необходимо

$$\sqrt{y^2 - 2y + 4} > y$$

необходимо

$$y^2 - 2y + 4 > y^2 \Rightarrow y < 2, \log_2(4-y) > 1,$$

аналогично,

 $\sqrt{x^2 - 2x + 4} < x \Rightarrow x > 2$, что приводит к противоречию, так как по предположению $x < 2$.
Значит при $x < 2$ решений нет, $x \geq 2$ и тогда $y \geq 2$ и $z \geq 2$.

Далее предположим $x > 2$. Рассуждениями, аналогичными с точностью до замены знаков $>, \geq$ на знаки $<, \leq$; знаков $<, \leq$ на знаки $>, \geq$ соответственно, показываем, что такое предположение приводит к необходимости $x < 2$, т.е. к противоречию. В таком случае $x \leq 2$, $y \leq 2$ и $z \leq 2$.

Имеем $x \geq 2$ и $x \leq 2$. Значит $x = 2$ — единственное значение x , при котором ~~эта~~ возможно существование решений. Аналогично $y = 2$ и $z = 2$.

Подстановкой в исходную систему убеждаемся, что $x = y = z = 2$ является решением.

Ответ: $(2; 2; 2)$.

Чистовик.

н4.

Пусть $f_1(x) = \frac{16x^2}{\pi^2} + \frac{625\pi^2}{x^2} = \left(\frac{4x}{\pi} + \frac{25\pi}{x}\right)^2 - 200;$

$$f_2(x) = 100 \cos^2 x;$$

$$f_3(x) = 3 \sin^2 x,$$

тогда $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x).$

Рассмотрим $f_1(x)$. Очевидно, что функция принимает наименьшее значение тогда, когда $\left|\frac{4x}{\pi} + \frac{25\pi}{x}\right|$ минимально. Найдем такое x .

Для этого рассмотрим $g(x) = \frac{4x}{\pi} + \frac{25\pi}{x}.$

Заметим, что:

- 1) при $x > 0$, $g(x) > 0$; при $x < 0$, $g(x) < 0$;
- 2) $g(-x) = -\frac{4x}{\pi} - \frac{25\pi}{x} = -g(x)$, функция нечетная

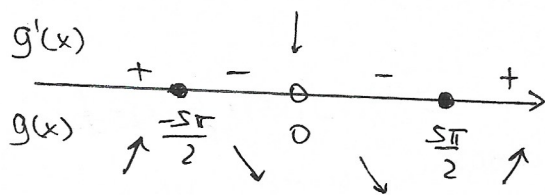
3) $g'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{25\pi}{x^2}$

Найдем экстремумы:

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{25\pi}{x^2} = \frac{4}{\pi}$$

$$x^2 = \frac{25\pi^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{2}$$



Имеем

$$g\left(\frac{5\pi}{2}\right) \leq g(x) \quad \forall x > 0 \quad \text{и} \quad g(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Тогда

$$\left|g\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right| \leq |g(x)| \quad \forall x > 0.$$

Так же

$$g\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \geq g(x) \quad \forall x < 0 \quad \text{и} \quad g(x) < 0 \quad \forall x < 0.$$

Тогда

$$\left|g\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right| \leq |g(x)| \quad \forall x < 0.$$

Наконец, из

$$g(-x) = -g(x) \quad \text{следует}$$

$$|g(-x)| = |g(x)|, \quad \left|g\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right| = \left|g\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right|$$

А так как $f_1(x)$ минимальна тогда, ~~а~~ когда

минимально $|g(x)|$, то $f_1(x)$ ^{Чистовик} достигает своего наименьшего значения в точках $x = \frac{5\pi}{2}$ и $x = -\frac{5\pi}{2}$.

Рассмотрим $f_2(x)$ и $f_3(x)$.

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1,$$

$$0 \leq 100 \cos^2 x \leq 100,$$

$$0 \leq f_2(x) \leq 100.$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$-1 \leq \sin^7 x \leq 1,$$

$$-3 \leq 3 \sin^7 x \leq 3,$$

$$-3 \leq f_3(x) \leq 3.$$

Заметим, что $f_2\left(\frac{5\pi}{2}\right) = f_2\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 100 \cos^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$, т.е. функция принимает свое наименьшее значение.

Также $f_3\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 3 \sin^7\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -3$, функция минимальна.

$$\text{Но } f_3\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 3 \sin^7\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 3 > f_3\left(-\frac{5\pi}{2}\right).$$

Итак, имеем

$$\begin{cases} f_1\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \leq f_1(x) \\ f_2\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \leq f_2(x) \\ f_3\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \leq f_3(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

В таком случае, так как $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, то из системы следует, что

$$f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Значим } f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) &= \frac{16 \cdot 25\pi^2}{4\pi^2} + 100 \cos^2\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{625\pi^2 \cdot 4}{25\pi^2} + 3 \sin^7\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \\ &= 100 + 0 + 100 - 3 = 197 \quad - \text{наименьшее значение функции.} \end{aligned}$$

При этом равенство (*) обращается в равенство только тогда, когда выполняется $f_1(x_0) = f_1\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$. Как это доказать? Это выполняется только при $x = \frac{5\pi}{2}$ и $x = -\frac{5\pi}{2}$.

Чистовик.

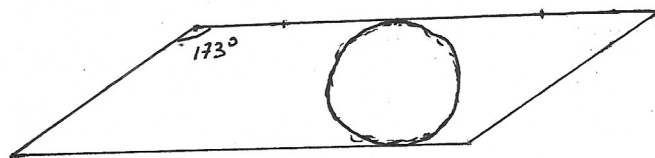
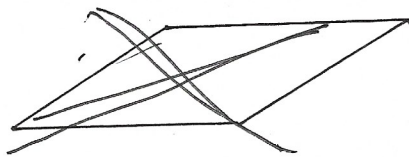
Но $f_3(\frac{5\pi}{2}) > f_3(-\frac{5\pi}{2})$, значит $f(\frac{5\pi}{2}) > f(-\frac{5\pi}{2})$
 (Действительно, $f(\frac{5\pi}{2}) = 203$).

Значит, функция $f(x)$ принимает своё наименьшее значение только в точке $x = -\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: 197 при $x = -\frac{5\pi}{2}$.

нб.

Такое возможно, например, если размеры стола таковы, что шар касается двух параллельных бортов стола (понятно, что стол должен быть очень маленьким).



Схематичный рисунок.

Тогда шар не будет двигаться между этими бортами и при достаточно сильном ударе будет двигаться куда-то между двумя другими бортами и неизбежно пройдет первоначальную точку.