



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Насыров Руслан Рашидович**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 13)x^2 - (2a - 9)x + a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква O и буква Γ . Все слова начинаются на букву O и заканчиваются тоже на букву O . В любом слове буква O не может соседствовать с другой буквой O . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы Γ . Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

11. Вариант 2 Ученик

вып. 9: $b; bq; bq^2; bq^3; bq^4; bq^5$

1

попр: $\frac{b(1+q+q^2+q^3)}{4} = 20$

$\frac{bq^2(1+q+q^2+q^3)}{4} = 180$

① $\frac{b(q^4-1)}{q-1} = 80$

② $\frac{bq^2(q^4-1)}{q-1} = 720$

①:②: $q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

если $q = 3$ то ①:

①: $\frac{b \cdot 80}{q-1} = 80 \Leftrightarrow b = q-1$

$q = \pm 3$ $\begin{cases} b=2 \Rightarrow bq^4=162 \\ b=-4 \Rightarrow bq^4=-324 \end{cases}$

Ответ: 162; -324

$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)$

$\begin{cases} 360^\circ - 2\pi \\ x^\circ - y \end{cases}$

$\sin(\pi x) = \sin(\frac{\pi x}{180})$

$y = \frac{x\pi}{180}$

$\sin(\pi x) - \sin(\frac{\pi x}{180}) = 0$

$2 \cos(\frac{\pi x(1+\frac{1}{180})}{2}) \sin(\frac{\pi x(1-\frac{1}{180})}{2}) = 0$

$\frac{\pi x(1+\frac{1}{180})}{2} = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$

$x(1+\frac{1}{180}) = 1 + k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi x(1-\frac{1}{180})}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x(1-\frac{1}{180}) = 2k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \textcircled{A} x = \frac{(1+k)180}{181}$

$\textcircled{B} x = \frac{2k \cdot 180}{179}$

$\Rightarrow \textcircled{A} x = \frac{(1+k)180}{181} = A_k$
 $\textcircled{B} x = \frac{(1+k)180}{181} = B_k$
 $\textcircled{C} x = \frac{360k}{179} = C_k$

найдем мин n - 2 между канной парой
и группой групп.

12

① $A-A$: $A_{k+1} - A_k = \frac{180 \cdot 4}{181} = \frac{720}{181}$ (мин. 2 между канной парой)

② $B-B$: $B_{k+1} - B_k = \frac{360}{181}$

③ $C-C$: $C_{k+1} - C_k = \frac{360}{179}$

④ $A-B$: $|A_6 - B_6| = \frac{180}{181} |1 + 4a + 1 - 4b| = \frac{360}{181} |1 + 2(a-b)|$
 $\geq \frac{360}{181} (разность/6) \geq 1$ (канна $\neq$)

⑤ $A-C$: $|A_9 - C_9| = 180 \left| \frac{1+4a}{181} - \frac{2c}{179} \right| = \frac{180}{181 \cdot 179} |179 + 4 - 179a - 362c|$
 $= \frac{180}{180} |7 + 6a - 362c + 179|$
 $y = 7 + 6a - 362c + 179$

$A-A$: $A_{k+1} - A_k = \frac{180}{181} \cdot 2 = \frac{360}{181}$

$B-B$: $B_{k+1} - B_k = \frac{360}{181}$

$A_k = \frac{360}{181} k + \frac{180}{181} = \frac{180}{181} (2k + 1)$

$B_k = \frac{360}{179} k$

$A-B$: $|A_9 - B_9| = 180 \left| \frac{2a+1}{181} - \frac{2b}{179} \right| = \frac{180}{181 \cdot 179} |179 \cdot 2a + 179 - 362b|$

$|1| = |358a - 362b + 179| \geq 1$ (канна $\neq$)

при $a = 45 = b$: $|1| = |45(368 - 362) + 179| = |109 - 180| = 7$

$$a \in [-5; 6] \quad \checkmark 4.$$

методом.

$$3x^2 - (3a-14)x^2 - (a-9)x + a-1 = 0$$

попытки разделить на $x+1$ корень: -3 : не делит

$$\begin{array}{c|c|c|c} 3 & -3a+14 & 9-2a & a-1 \\ \hline 3 & -3a+4 & 7a-3 & \end{array}$$

4

$$\begin{array}{c|c|c|c} 3 & -3a+14 & 9-2a & a-1 \\ \hline -1 & 3 & -3a+10 & a-1 \end{array} \quad 0$$

$$(x+1)(3x^2 + (10-3a)x + a-1) = 0$$

$x = -1$ корень.

$$y(x) = 3x^2 + (10-3a)x + a-1 = 0$$

т.к. корни рефр $\Rightarrow y(-1) \neq 0$:

$$y(-1) = 3 + 3a - 10 + a - 1 \neq 0$$

$$4a - 8 \neq 0$$

$$a \neq 2$$

тогда у $y(x)$ одно целое

корня, нулю, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_1, x_2 \neq -1 \\ x_1 \neq x_2 \end{array} \right.$$

$$x_{1,2} = \frac{3a-10 \pm \sqrt{9a^2 - 60a + 100 - 12(a-1)}}{6}$$

$$x_n = \frac{3a-10 \pm \sqrt{9a^2 - 72a + 112}}{6}$$

① $a = -5$: ~~$9a^2 - 72a + 112 = 225 + 360 + 112 = 697$~~

6: ~~$3 \nmid 697$~~

~~$9a^2 - 72a + 112 = 225 + 360 + 112 = 697$~~

~~$9a^2 - 72a + 112 = 225 + 360 + 112 = 697$~~

~~$9a^2 - 72a + 112 = 225 + 360 + 112 = 697$~~

① $a = -5$: $\sqrt{697} = 26.4$
 $\frac{1225}{337} \quad \frac{332}{697} \quad \frac{360}{697} \quad \frac{112}{697}$
 $26 < \sqrt{697} < 27 \Rightarrow 656 < 697 < 729$
 $\therefore a = -5$ не подходит.

$$y(x) := 3x^2 + (10 - 3a)x + a - 1$$

5

по Виета: $x_1 + x_2 = \frac{3a - 10}{3}$

$$x_1 x_2 = \frac{a - 1}{3}$$

~~ме: $3a - 10 = 3$
 $a = 4$
 $a = 4$~~

~~ме: $3a - 10 = 3$~~

м.н. $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3a - 10}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{a - 1}{3} \end{cases}$

и $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3a - 10}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{a - 1}{3} \end{cases}$

то если 1 корень - целое,
2-й по л. Виета также
целый;

~~м.н.~~
① $a = -4$

$$9a^2 - 72a + 112 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 9 \cdot 112}}{9}$$

$$36^2 - 9 \cdot 112 = 9^2 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4^2 \cdot 7 = 9 \cdot 4^2 \cdot 2$$

$$a_{1,2} = \frac{36 \pm 12\sqrt{2}}{9} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{3}$$

$$9a^2 - 72a + 112 = 9 \left(a - \frac{12 + 4\sqrt{2}}{3} \right) \left(a - \frac{12 - 4\sqrt{2}}{3} \right) =$$

$$= (3a - 12 - 4\sqrt{2})(3a - 12 + 4\sqrt{2}) = (3a - 12)^2 - 32 = n^2$$

$n \in \mathbb{N}$

② ~~ме: $a = -4$ $24^2 - 32 = n^2 \Rightarrow 544 = n^2$~~

② $a = -4$: $24^2 - 32 = n^2 \Rightarrow 544 = n^2$

$$23^2 < 544 < 24^2$$

$$529 < 544 < 576$$

ме: $a = -4$ не подходит

③ $a = -3$: $21^2 - 32 = n^2 \Rightarrow 409 = n^2$

$$20^2 < 409 < 21^2$$

$$400 < 409 < 441$$

$a = -3$ не подходит

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 180 \\ 576 \\ \hline 576 \\ - 32 \\ \hline 544 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 421 \\ - 32 \\ \hline 409 \end{array}$$

$$(4) \alpha = -2: \Leftrightarrow 18^2 - 32 = n^2$$

$$292 = n^2$$

$$17^2 < 292 < 18^2$$

$$289 < 292 < 324$$

$\alpha = -2$ не покр.

$$(5) \alpha = -1 \Leftrightarrow 16^2 - 32 = n^2 \Leftrightarrow 226$$

$$14^2 < 226 < 15^2$$

$$169 < 226 < 225$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ - 32 \\ \hline 194 \end{array}$$

6

$$\begin{array}{r} 226 \\ - 32 \\ \hline 194 \end{array}$$

$\alpha = -1$ не покр.

$$(6) \alpha = 0: \Leftrightarrow 12^2 - 32 = n^2 \Leftrightarrow 144$$

$$112 = n^2$$

$$10^2 < 112 < 11^2 \Leftrightarrow 100 < 112 < 121: \alpha = 0$$

$$(7) \alpha = 1: 9^2 - 32 = n^2 \Leftrightarrow 81$$

$$\Rightarrow n = 7$$

$$x_{1n} = \frac{36 \pm 7}{6} \quad x_1 = \frac{36 - 10 \pm 7}{6}$$

$$x_{1n} = \frac{-7 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{-44}{6} \notin \mathbb{Z}$$

не покр.

2 условия: 0, -1, берем

$$(8) \alpha = 2: 6^2 - 32 = n^2 \Leftrightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2 (n \in \mathbb{N})$$

$$x_{1n} = \frac{3 \cdot 2 - 10 \pm 2}{6}$$

$$x_{1n} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

не покр. 2 условия

$$x_1 = -1$$

каждое = -1

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$(9) \alpha = 3: 3^2 - 32 = n^2 < 0: \text{не покр. (нет корней)}$$

$$(10) \alpha = 4: -32 = n^2 < 0 \text{ не покр.}$$

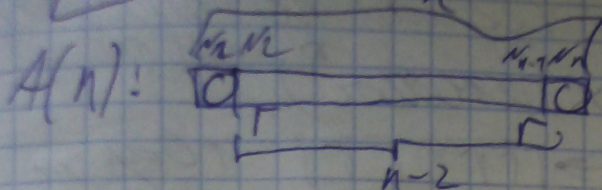
$$(11) \alpha = 5: 3^2 - 32 = n^2 < 0: \text{не покр.}$$

$$(12) \alpha = 6: 0^2 - 32 = n^2 \Rightarrow n = 2$$

$$x_{1n} = \frac{3 \cdot 6 - 10 \pm 2}{2}$$

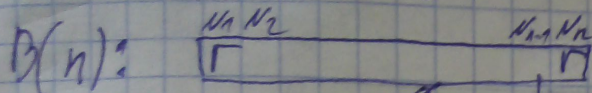
18

1/5 предложение истинно.

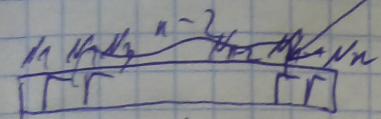


значит, то на n_2 и n_{n-1} нечет галочки ставим

поэтому $A(n) = B(n-2)$ (обозначено) (возможное соотношение)



может быть 4 варианта для n_2 и n_{n-1} :
(вариант $B(n)$ разный вариант $B(n)$ (возможное соотношение))

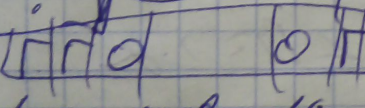


здесь вариант

на n_3 и n_{n-2} нечет галочки ставим D (показ)

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-4)$ (ошибка)



вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

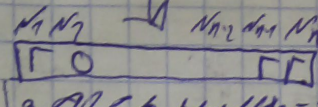
вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

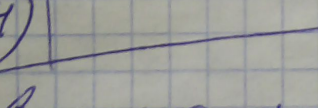


здесь вариант

на n_3 и n_{n-2} нечет галочки ставим D (показ)

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-4)$ (ошибка)



вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

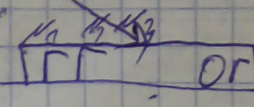
вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

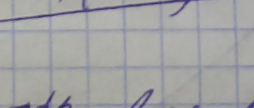


здесь вариант

на n_3 и n_{n-2} нечет галочки ставим D (показ)

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-4)$ (ошибка)



вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

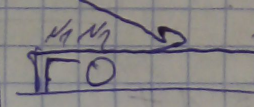
вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

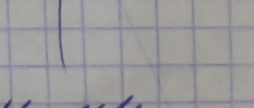


здесь вариант

на n_3 и n_{n-2} нечет галочки ставим D (показ)

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-4)$ (ошибка)



вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

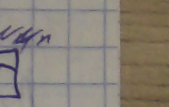
вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

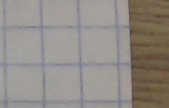


здесь вариант

на n_3 и n_{n-2} нечет галочки ставим D (показ)

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-4)$ (ошибка)



вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

вариант $A(n-3)$

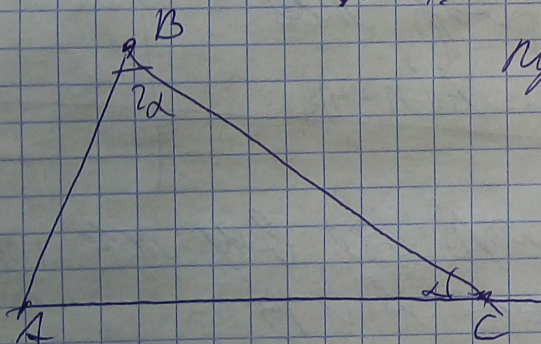
$P(5)$: Γ $\rightarrow$ $\begin{cases} \textcircled{1} \Gamma \Gamma \cdot \Gamma \Gamma \rightarrow \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \text{ (верно)} \\ \textcircled{2} \Gamma \Gamma \cdot \Gamma \Gamma \times \text{ (если по 2 попра)} \\ \textcircled{3} \Gamma \Gamma \cdot \Gamma \Gamma \times \text{ (аналог)} \\ \textcircled{4} \Gamma \Gamma \cdot \Gamma \Gamma \rightarrow \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \Gamma \text{ : 1 шаг } m \end{cases}$

$mm: B(5) = 2$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86		
A	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	

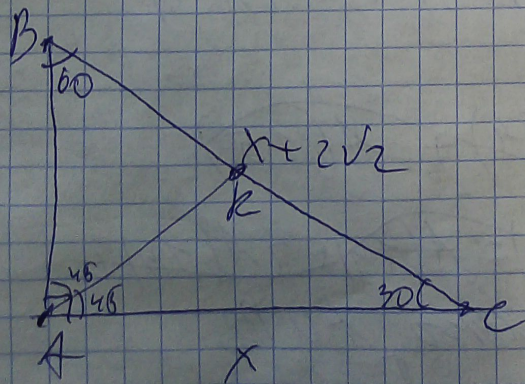
$P(0) = 1 +$ $\frac{16}{14}$ $\frac{21}{13}$ $\frac{28}{12}$ $A(n) = P(n-2)$
 зонам максимум поправ

Ответ: 65 слов



пусть $C = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$

① $\angle A = 3\angle C (= 3\alpha)$ $\sum \text{углов} = 6\alpha = 180^\circ$
 $\alpha = 30^\circ$
 $3\alpha = 90^\circ$



$$MAK = MC = x + 2\sqrt{2}$$

в треугольнике AKC (по
 углу $\angle 60^\circ > 30^\circ$) $= x$

AK -диссектр $\Rightarrow \angle BAK = \angle KAC = 45^\circ$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{x+2\sqrt{2}}$$

10

$$\sqrt{3}x + 2\sqrt{6} = 2x$$

$$x(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{6}$$

$$x = \frac{2\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})2\sqrt{6}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$x = 4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$$

$$x = (2+\sqrt{3})2\sqrt{6}$$

$$\angle AKR = 180 - 60 - 45 = 180 - 105 = 75^\circ$$

sin rule in $\triangle MKR$:

$$\frac{AK}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin(75^\circ)}$$

$$(\angle MKR = 180 - 60 - 45 = 75^\circ)$$

$$AB = \frac{x+2\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2} + \sqrt{2} = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2}$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

$$AK = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})} \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{6}}{2} \right)$$

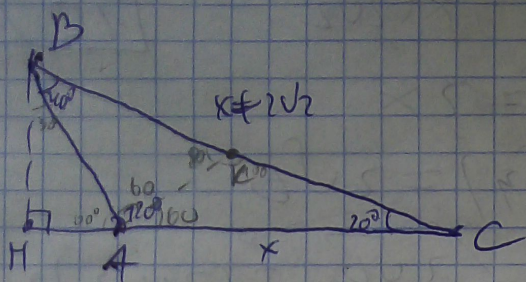
$$AK = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} \cdot \sqrt{2}(1+(2+\sqrt{3})\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}(4+2\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(4+4\sqrt{3}(2+\sqrt{3}))(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \frac{4\sqrt{3}(2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3})}{2} =$$

$$= 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 6+2\sqrt{3}$$

$$\angle BAC = 3 \cdot \angle B = 6^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 6^\circ - 2^\circ = 172^\circ$$

$$2 \text{ no max} = AC = x$$


ММ - высокая Вматс

$\frac{1}{C} \text{ mA } H = 0.0^\circ$

$$\angle MPA = 30^\circ$$

mean sin ΔABC : $\frac{x\sqrt{2}}{\sin(70^\circ)} = \frac{x}{\sin(40^\circ)} = \frac{x\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$x \frac{\sqrt{3}}{2} = x \sin 40^\circ + 2\sqrt{2} \sin 40^\circ$$

$$X(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ) = 2\sqrt{2} \sin 40^\circ$$

$$X = \frac{20\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}$$

$$\angle ANC = 180 - 20 - 60 = 100^\circ$$

$$\text{Moon sin} \triangle AKC: \quad \frac{L}{\sin(100^\circ)} = \frac{AK}{\sin(20^\circ)}$$

$$Ak = \frac{x \cdot \sin 20^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{4\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\sqrt{3} - 2 \sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 40^\circ \sin 70^\circ}$$

$$\sin 40^\circ \sin 20^\circ = \frac{1}{2}(\cos(20^\circ) - \cos(60^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(2\cos 20^\circ - 1)$$

$$\begin{aligned} (\sin 60^\circ - \sin 40^\circ) / \sin 100^\circ &= 2 \cos \frac{1}{2}(\cos 40^\circ - \cos 160^\circ) / -\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 140^\circ) \\ &= \frac{4}{1} (2 \cos 40^\circ - 2 \cos 160^\circ - 1 + 2 \cos 140^\circ) \end{aligned}$$

En AKZ

Omskern: $6 + 2\sqrt{3}$ mm $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ} \cdot \frac{4\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\sqrt{3} - 2 \sin 40^\circ}$
($\angle em = 72^\circ$) ($\angle em = 62^\circ$)

np: min 3M-2.

$$\left(\frac{180}{181-179} \right) = \frac{180}{2} = 90$$

$$\frac{180}{181-179} < \frac{360}{181}$$

3

$$181.179 = (180+1)/(180-1)$$

$$\frac{180}{179} < 360$$

$$1 < 2.179$$

$$= 180^2 - 1 = 32400 - 1 = 32399$$

~~Oncom.~~

$$\Delta = \frac{180}{32399} = \frac{60}{11133}$$

$$\text{Oncom. } \Delta_{min} = \frac{60}{11133}$$

$$180^2 - 1 = 32400 - 1 = 32399$$

$$\text{Oncom. } \Delta_{min} = \frac{180}{32399}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

-3626

= 1