



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Богатырева Ирина Сергеевна**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

# Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

---

## Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на  $2\sqrt{2}$  больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число  $a$  из отрезка  $[-5; 6]$  и после этого решает уравнение  $3x^3 - (3a - 13)x^2 - (2a - 9)x + a - 1 = 0$ .

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква  $O$  и буква  $\Gamma$ . Все слова начинаются на букву  $O$  и заканчиваются тоже на букву  $O$ . В любом слове буква  $O$  не может соседствовать с другой буквой  $O$ . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы  $\Gamma$ . Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.



N1

Пусть первый член прогрессии = a, шаг прогрессии = b.

Тогда  $\frac{a+ab+ab^2+ab^3}{4} = 20$   $\frac{ab^2+ab^3+ab^4+ab^5}{4} = 180$

$$\begin{cases} a+ab+ab^2+ab^3=80 \\ ab^2+ab^3+ab^4+ab^5=720 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+ab+ab^2+ab^3=80 \\ b^2(a+ab+ab^2+ab^3)=720 \end{cases}$$

$$ab^4=?$$

$$b^2 \cdot 80 = 720$$

$$b^2 = 9 \quad b = \pm 3$$

а)  $b=3$

$$a+3a+9a+27a=80$$

$$40a=80$$

$$a=2$$

$$ab^4=2 \cdot 3^4=162$$

б)  $b=-3$

$$a-3a+9a-27a=80$$

$$-20a=80$$

$$a=-4$$

$$ab^4=-4 \cdot (-3)^4=-324$$

Ответ: -324; 162.

N5.

По условию первая и последняя буквы слова - O; где O не могут быть  
разданы  $\Rightarrow$  10 и 19-е буквы - O; 2-ая и 18-я буквы - Г

Рассмотрим i-тую букву. Пусть есть  $\times$  вариантов, где ~~это~~ это буква O,  
y вариантов, где это буква Г<sub>1</sub> (т.е. Г, перед которой стоит O), z вариантов, где

эта буква Г<sub>2</sub> (т.е. Г, перед которой стоит Г). Тогда для i+1-ой буквы возможны  
следующие варианты: y+z - это эта буква O, x - это буква Г<sub>1</sub>, y - это буква Г<sub>2</sub>.

Составим таблицу  
количества вариантов

Так как 18-я буква - Г, то

Г-та буква не может быть Г<sub>2</sub>

$$\Rightarrow \text{всего вариантов } 37+28=65$$

Ответ: 65

| Номер<br>буквы | O | Г <sub>1</sub> | Г <sub>2</sub> |
|----------------|---|----------------|----------------|
| 2              | 0 | 1              | 0              |
| 3              | 1 | 0              | 1              |
| 4              | 1 | 1              | 0              |
| 5              | 1 | 1              | 1              |
| 6              | 2 | 1              | 1              |
| 7              | 2 | 2              | 1              |
| 8              | 3 | 2              | 2              |
| 9              | 4 | 3              | 2              |
| 10             | 5 | 4              | 3              |
| 11             | 7 | 5              | 4              |
| 12             | 9 | 7              | 5              |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 13 | 12 | 9  | 7  |
| 14 | 16 | 12 | 9  |
| 15 | 21 | 16 | 12 |
| 16 | 28 | 21 | 16 |
| 17 | 37 | 28 | 21 |



N2.

$$1 \text{ градус} = \frac{\pi}{180}$$

$$x \text{ градусов} = \frac{\pi \cdot x}{180}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(\pi \cdot x / 180)$$

$$\begin{cases} \pi x = \frac{\pi x}{180} + 2\pi m, & m - \text{целое} \\ \pi x = -\frac{\pi x}{180} + \pi + 2\pi n, & n - \text{целое} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{180}{179} \cdot 2m & - \text{первая серия} \\ x = \frac{180}{181} \cdot (2n+1) & - \text{вторая серия} \end{cases}$$

Расстояние между симметричными корнями первой серии  $= \frac{180 \cdot 2}{179}$ ,  
 для второй серии  $= \frac{180 \cdot 2}{181}$

Расстояние между двумя корнями разных серий:

$$\begin{aligned} \left| \frac{180}{179} \cdot 2m - \frac{180}{181} \cdot (2n+1) \right| &= \frac{180}{179 \cdot 181} \cdot \left| 181 \cdot 2m - 179(2n+1) \right| = \\ &= \frac{180}{179 \cdot 181} \cdot \left| 362m - 358n - 179 \right| \end{aligned}$$

$m, n$  - целые  $\Rightarrow 362m - 358n - 179 \rightarrow$  нечетное

$$\min(|362m - 358n - 179|) = 1 \text{ при } m=n=45$$

~~Решение~~ (Значение данного модуля целое и нечетное  $\Rightarrow$   
 1 - минимальное возможное значение)

$$\text{Тогда расстояние} = \frac{180}{179 \cdot 181}$$

$$\frac{180}{179 \cdot 181} < \frac{180 \cdot 2}{179}; \quad \frac{180}{181 \cdot 179} < \frac{180 \cdot 2}{181} \Rightarrow \frac{180}{181 \cdot 179} - \text{искомое расстояние}$$

Ответ:  $\frac{180}{179 \cdot 181}$



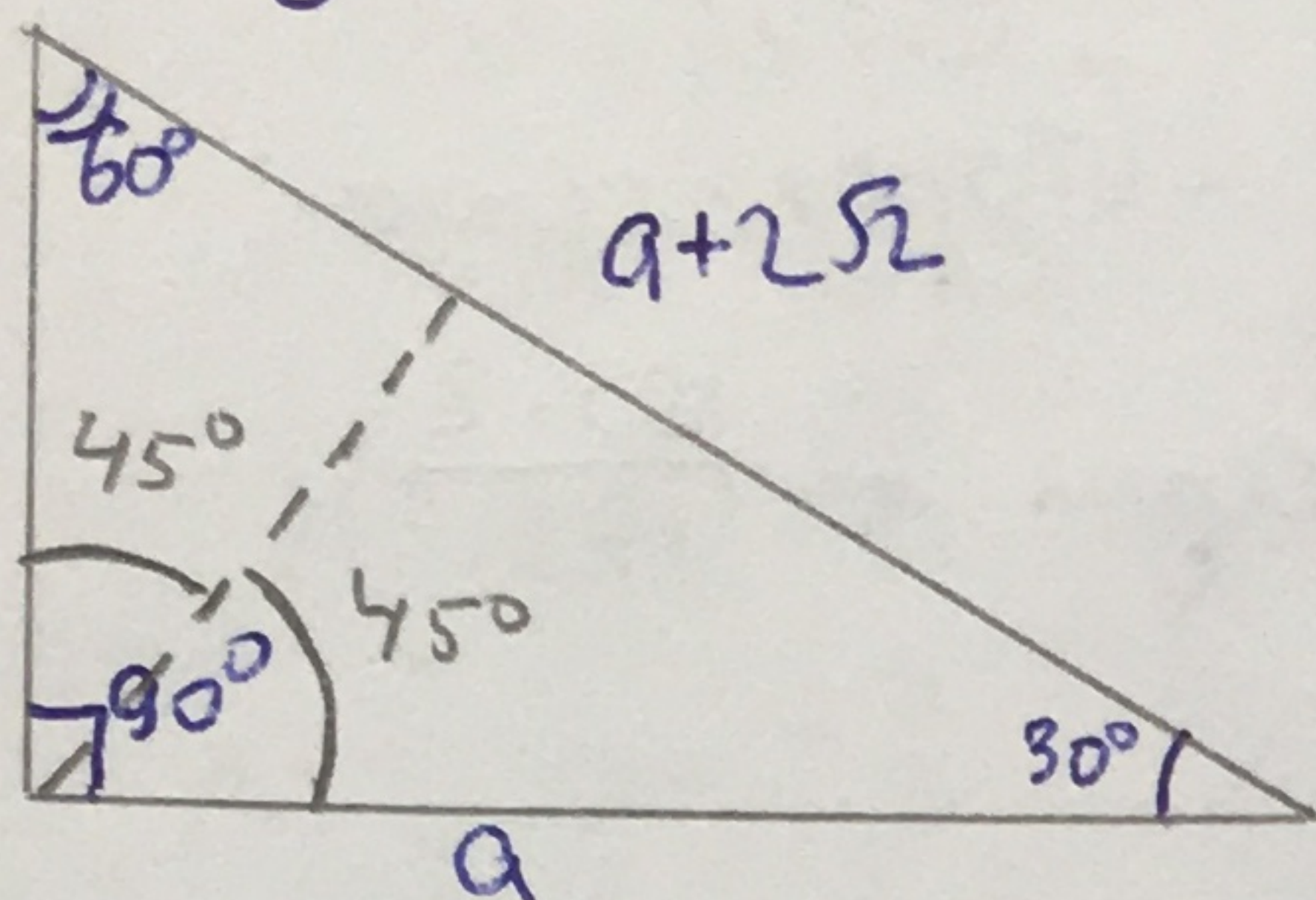
№3.

Обозначим меньший из двух первых углов  $\alpha$ , тогда второй  $= 2\alpha$ .

Рассмотрим два варианта:

а) Третий угол  $= 3\alpha$ .

Тогда  $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180$ ,  $\alpha = 30$ , треугольник прямоугольный



По укл. биссектриса больше бокового катета на  $2\sqrt{2}$  (см. рис.) Пусть боковой катет  $= a$ .

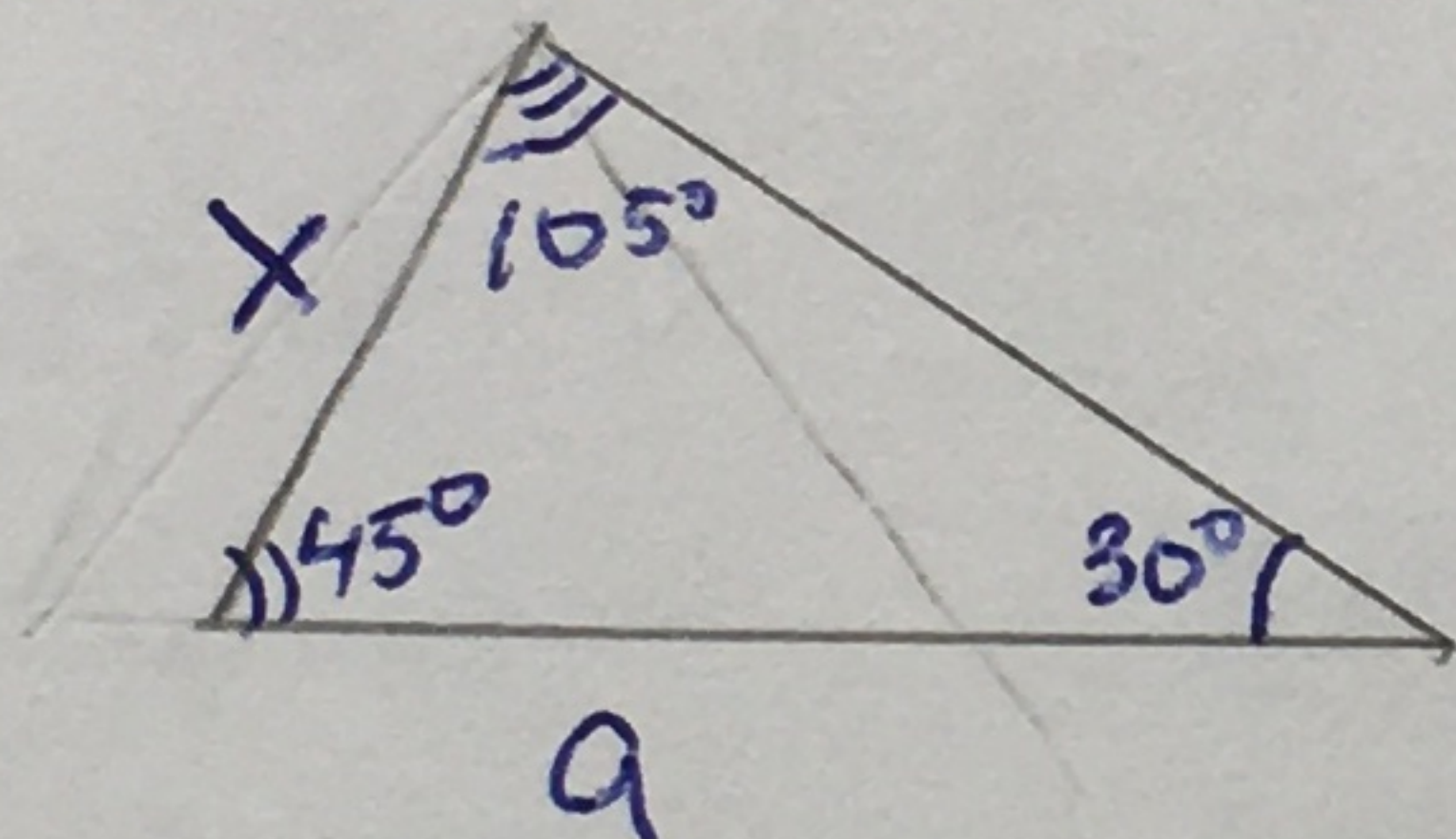
$$\text{Тогда } \frac{a}{a+2\sqrt{2}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2a = \sqrt{3}a + 2\sqrt{2}$$

$$a(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$

Проведем биссектрису третьего угла и рассмотрим треугольник, содержащий боковой катет:



Угол, образованный пересечением биссектрисы прямого угла и гипотенузы

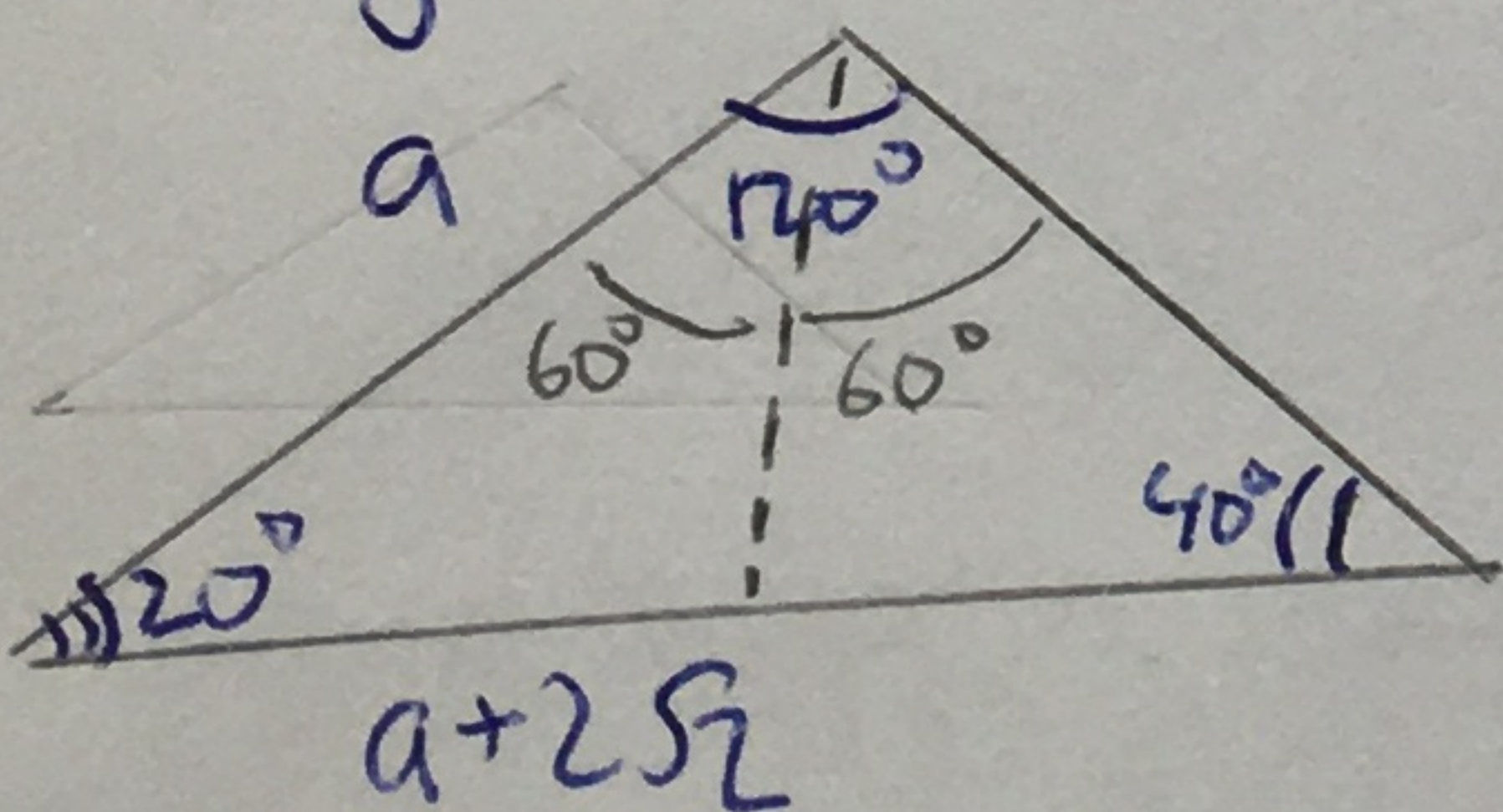
$$\text{треугольника} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$$x = \frac{a \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{4\sqrt{2}(2 + \sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{2}}{2 \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{8\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{2}(3 - 2 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{2} + 6$$

По теореме синусов  $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 105^\circ}$

б) Третий угол  $= 6\alpha$

Тогда  $\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180$ ,  $\alpha = 20$ . Обозначим вторую по величине сторону за  $a$ .



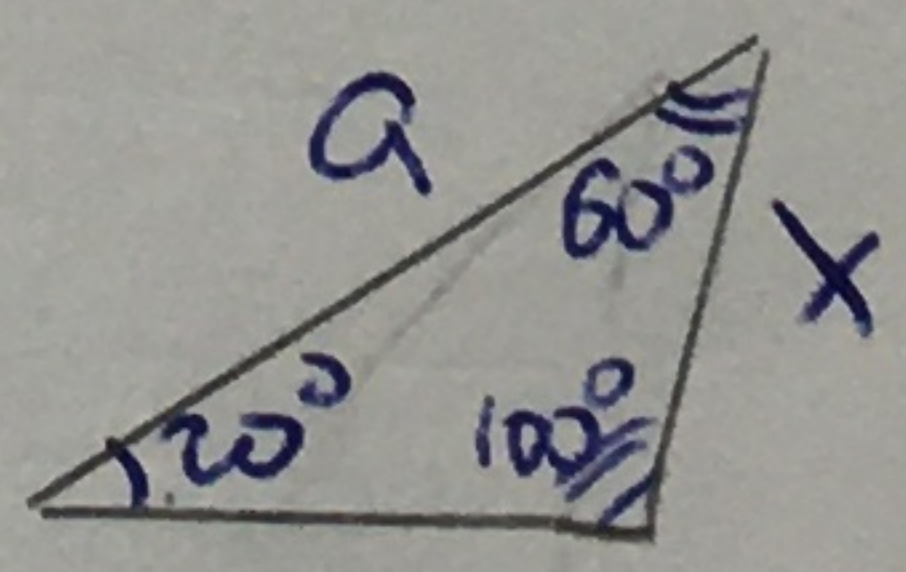
Тогда по т. синусов  $\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{a+2\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}$

$$a \cdot \sin 120^\circ = (a + 2\sqrt{2}) \cdot \sin 40^\circ$$

$$a(\sin 120^\circ - \sin 40^\circ) = 2\sqrt{2} \sin 40^\circ$$

$$a = \frac{2\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\sin 120^\circ - \sin 40^\circ}$$

Проведем биссектрису и рассмотрим треугольник, содержащий угол  $20^\circ$ .



По теореме синусов

$$\frac{x}{\sin 20^\circ} = \frac{a}{\sin 100^\circ} \quad x = \frac{a \cdot \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$x = \frac{\sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot 2\sqrt{2}}{\sin 100^\circ (\sin 120^\circ - \sin 40^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot 2\sqrt{2}}{\sin 80^\circ (\sin 60^\circ - \sin 40^\circ)} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 80^\circ \cdot 2 \sin 10^\circ \cdot \cos 50^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 20^\circ}{\sin 80^\circ \cdot \sin 10^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 2\sqrt{2}$$

Ответ:  $2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{2} + 6$



№4.

Так как все коэффициенты уравнения целые, то целые корни должны быть делителями свободного члена  $(a-1)$ .  $a-1$  принимает значения  $\in [-6; 5]$

а)  $a=1, a-1=0$

$$3x^3 - (3a-13)x^2 - (2a-9)x = 0$$

$$3x^3 + 10x^2 + 7x = 0$$

$$x(3x^2 + 10x + 7) = 0$$

$$x(x+1)(3x+7) = 0$$

$$x=0 \quad x=-1 \quad x=-\frac{7}{3}$$

по условию

$x=-4$

$$-192 - 48a + 208 + 8a - 36 + a - 1 = 0$$

$$-21 - 39a = 0 \quad a \text{ не целое}$$

$x=-3$

$$-81 - 27a + 117 + 6a - 27 + a - 1 = 0$$

$$8 - 20a = 0 \quad a \text{ не целое}$$

$x=0$

$$a-1=0$$

$a=1$  — уже рассмотрено

б)  $a \neq 1$

Возможные целые корни: от  $-6$  до  $6$

$$-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

Подставим корни из них

$x=-6$

$$-648 - 108a + 468 + 12a - 54 + a - 1 = 0$$

$$-235 - 95a = 0$$

$$a = -\frac{235}{95} = -\frac{47}{19} \quad \text{— не целое}$$

$x=-5$

$$-375 - 75a + 325 + 10a - 45 + a - 1 = 0$$

$$-96 - 64a = 0$$

$$a = -\frac{96}{64} = -\frac{3}{2} \quad \text{— не целое}$$

$x=-2$

$$-24 - 12a + 52 + 4a - 18 + a - 1 = 0$$

$$9 - 7a = 0 \quad \text{не целое}$$

$x=-1$

~~$$-3 - 3a + 13 + 2a - 9 + a - 1 = 0$$~~

~~$$0 + 0a = 0$$~~

~~$$0 + 0a = 0$$~~

$a \in \mathbb{R}$

$x=1$

$$3 - 3a + 13 - 2a + 9 + a - 1 = 0$$

$$24 - 4a = 0$$

$a=6$

Итого: при  $a=1$  и  $a=6$  — 2 целых корня

$(a=1 \rightarrow x=0; 1)$  При других  $a$

$a=6 \rightarrow x=-1; 1$  1 целый корень

Вероятность  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ответ:  $\frac{1}{6}$

$x=2$

$$24 - 12a + 52 - 4a + 18 + a - 1 = 0$$

$$93 - 15a = 0 \quad \text{не целое}$$

$x=4$

$$192 - 48a + 208 - 8a + 36 + a - 1 = 0$$

$$435 - 55a = 0 \quad \text{не целое}$$

$x=6$

$$648 - 108a + 468 - 12a + 54 + a - 1 = 0$$

$$1169 - 119a = 0 \quad \text{не целое}$$

$x=3$

$$81 - 27a + 117 - 6a + 27 + a - 1 = 0$$

$$224 - 32a = 0$$

$$a=7 \quad \text{— не входит в диапазон}$$

$x=5$

$$375 - 75a + 325 - 10a + 45 + a - 1 = 0$$

$$744 - 84a = 0$$

$$a = \frac{744}{84} = \frac{372}{42} = \frac{124}{14} = \frac{62}{7} \quad \text{— не целое}$$



Председателю апелляционной комиссии  
олимпиады школьников  
"Покорь Воробьевы горы!"

Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова  
академику В. Я. Садовникому  
от ученицы класса 11-3

ТБОУ школа №1502 "Энергия"  
г. Москва, ул. Молодцова, д. 10А  
Богатырева Ирина Сергеевна

Апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (95) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что, хотя не все мои решения совпадают с приведенными Вами решениями, во всех задачах мною написаны корректные и исчерпывающие решения и получены верные ответы.

31.05.2020

