МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Цуканова Валерия Сергеевна**

Технический балл: **85**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Вариант 4. Чистовик

№1

Пусть первый член прогрессии равен b_1, тогда второй - $b_1 \cdot q$, третий - $b_1 \cdot q^2$, 4-й - $b_1 \cdot q^3$, 5-й - $b_1 \cdot q^4$, 6 - й - $b_1 \cdot q^5$

ср. ар. первых 4-х: $\frac{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3}{4} = 10$

ср. ар. посл. 4-х: $\frac{b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5}{4} = 90$

$$\begin{cases} b_1 (1 + q + q^2 + q^3) = 40 \\ b_1 q^2 (1 + q + q^2 + q^3) = 4 \cdot 90 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$q^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 3 \text{ (I сл.)} \\ q = -3 \text{ (II сл.)} \end{array}\right.$

I случай. $q = 3$

$b_1 \cdot (1 + 3 + 9 + 27) = 40$

$b_1 \cdot 40 = 40 \Rightarrow b_1 = 1$

6-ой член: $1 \cdot 3^5 = 27 \cdot 9 = 243$

II случай. $q = -3$

$b_1 \cdot (1 - 3 + 9 - 27) = 40$

$b_1 \cdot (-20) = 40 \Rightarrow b_1 = -2$

6-ой член: $-2 \cdot (-3)^5 = 2 \cdot 243 = 486$

Ответ: 243 или 486

№2

$\sin(\pi x) - \sin(5x^\circ) = 0$

$2 \cdot \sin \frac{\pi x - 5x^\circ}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + 5x^\circ}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \frac{\pi x - 5x^\circ}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x + 5x^\circ}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x - 5x^\circ}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + 5x^\circ}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Лист 1

Чистовик

Переведём $5x^\circ$ в радианы. Получается $5x^\circ = \frac{5x\pi}{180} = \frac{x\pi}{36}$

$$\begin{cases} \pi x - \frac{\pi x}{36} = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \quad |:\pi \\ \pi x + \frac{\pi x}{36} = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \quad |:\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{35x}{36} = 2k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{37x}{36} = 1 + 2n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{72k}{35}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{36+72n}{37}, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

I сл. Ближайшие корни принадлежат 1-ой серии $\Rightarrow$ берём какое-то k, ближайший корень к нему будет с $k+1$, т.е. x с каждым k увеличивается, если k увелич. $\Rightarrow \Delta x_I = \left|\frac{72k+72}{35} - \frac{72k}{35}\right| = \frac{72}{35}$

II сл. Ближайшие корни принадлежат 2-ой серии $\Rightarrow$ берём какое-то n, ближайший корень к нему будет с $n+1$, т.е. x с каждым n увеличивается, если n увелич. $\Rightarrow \Delta x_{II} = \left|\frac{36+72n+72}{37} - \frac{36+72n}{37}\right| = \frac{72}{37}$

Сравним случаи: $\frac{72}{35} \not> \frac{72}{37} \Rightarrow 72\cdot 37 \not> 72\cdot 35$

III сл. ~~Б~~ один корень из первой серии, а 2-ой из 2-ой,

$$\Delta x_{III} = \left|\frac{72k}{35} - \frac{36+72n}{37}\right| = \left|\frac{72\cdot 37k - 35\cdot 36 - 35\cdot 72n}{35\cdot 37}\right| = \frac{36(|74k - 70n - 35|)}{35\cdot 37}$$

Это выражение минимально, когда $|74k - 70n - 35| \to \min$. Нулем этот модуль быть не может, т.к. $\underbrace{74k}_{\vdots 2} + \underbrace{70n}_{\vdots 2} = \underbrace{35}_{\not\vdots 2}$ ~~и~~ с делим.

Лист 2

Чистовик

Пусть $|74k - 70n - 35| = 1$. Такое может быть, к примеру: $74k - 70n = 36$

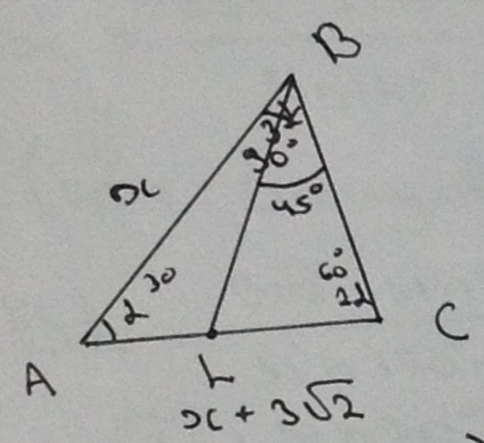
$37k - 35n = 18$, ($k = 18$, $n = 18 \Rightarrow$ верно, т.к. $37 \cdot 18 - 35 \cdot 18 = 18$) $\Rightarrow$ минимальное значение в этом случае $\frac{36}{35 \cdot 37}$

Сравним II случай, т.к. он меньше первого и III и

$\frac{72}{37} \not> \frac{36}{35 \cdot 37} \Rightarrow 72 \not> \frac{36}{35} \Rightarrow$ ответ: $\frac{36}{35 \cdot 37}$

Ответ: $\frac{36}{1295}$

№3



I случай. $\angle ABC = 3\alpha$

① Пусть $AB = x$, тогда $AC = x + 3\sqrt{2}$

② (по т. о сумме угл. Δ)

$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

③ (по теор. Пиф) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{3\sqrt{2} + x} \Rightarrow 3\sqrt{6} + \sqrt{3}x = 2x \Rightarrow (2 - \sqrt{3})x = 3\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}}{2 - \sqrt{3}}^{(2+\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{6} + 9\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3) \Rightarrow \sin 30° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = \frac{1}{2} \cdot AC$

④ (Теор. син. для Δ BCL)

$\frac{BC}{\sin 75°} = \frac{BL}{\sin 60°}$, $BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 4) = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2)$

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$

⑤ $BL = BC \cdot \frac{\sin 60°}{\sin 75°} = 3\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 2) \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} =$

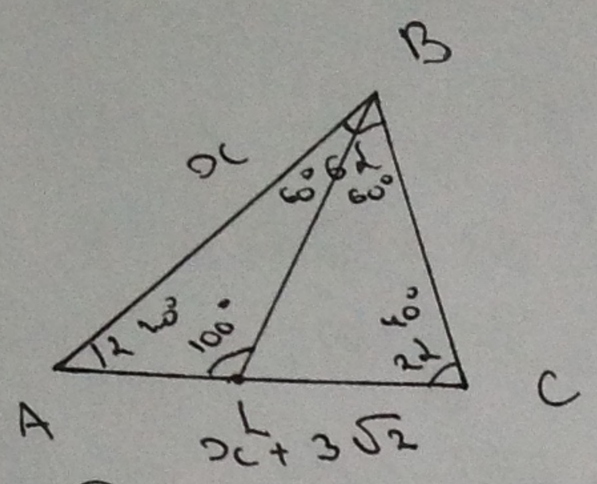
$= \frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)^{(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{6\sqrt{3}(3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)}{2} = 9\sqrt{3} + 9 - 6\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + 9$

Лист 3

Чистовик

II случай. $\angle ABC = 6\alpha$



① Пусть $AB = x$, тогда $AC = x + 3\sqrt{2}$

② (по т. о сумме угл. Δ)

$\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

③ (по т. синусов Δ ABC): $\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{x + 3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}$

$\sin 40^\circ \cdot x + 3\sqrt{2} \cdot \sin 40^\circ = x \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (\sin 120^\circ - \sin 40^\circ) = 3\sqrt{2} \sin 40^\circ \Rightarrow$

$$x = \frac{3\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\sin 120^\circ - \sin 40^\circ}$$

④ (по т. синусов Δ ABL): $\frac{x}{\sin 100^\circ} = \frac{BL}{\sin 20^\circ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BL = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin 40^\circ}{\sin 120^\circ - \sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin 20^\circ \cdot \cancel{\sin 40^\circ}}{2 \cdot \cancel{\sin 40^\circ} \cdot \cos 80^\circ \cdot \sin 100^\circ}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin 20^\circ}{2 \cdot \cos 80^\circ \cdot \sin 100^\circ}$$

⑤ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow \sin 100^\circ = \sin 80^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow BL = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sin 20^\circ}{2 \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{3\sqrt{2} \cancel{\sin 20^\circ}}{\cancel{\sin 60^\circ}} = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $3\sqrt{3} + a$ или $3\sqrt{2}$

№4

$3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x + (a+1) = 0$

Возьмём производную этой функции.

$9x^2 + (6a+26)x + (2a+9)$

$D = 36a^2 + 12 \cdot 26a - 36 \cdot 2a - 4 \cdot 81 = 36a^2 + 240a + 352 < 0$

$9a^2 + 80a + 88 < 0$

$D = 6400 - 3168 = 3232$

Чистовик

$a_1 = \frac{-80+\sqrt{5232}}{18} = \frac{-40+\sqrt{808}}{9}$

$a_2 = \frac{-40-\sqrt{808}}{9}$

$28 < \sqrt{808} < 29$

$-2 < -\frac{12}{9} < \frac{-40+\sqrt{808}}{9} < -\frac{11}{9} < -1$

$-8 < -\frac{69}{9} < \frac{-40-\sqrt{808}}{9} < -\frac{68}{9} < -7$

$\Rightarrow$ при $a \in [-6; -2]$ функция монотонна $\Rightarrow$ имеет только 1 корень.

Остается проверить все ~~остальные~~ a. Все целые корни по теореме о целых корнях должны быть делителями $a+1$.

~~Заметим, что корни~~

55

Заметим, что количество слов из $n+3$ букв равно количеству слов из $n+2$ букв и количеству слов из n букв при $n \geq 6$.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}$ + ТТО, $\underbrace{\qquad\qquad}_{n+1}$ + ТО. Среди них не будет ни одного повторяющегося.

Количество слов из 3-х букв равно 1: ОТО.

Количество слов из 4-х букв также равно 1: ОТТО

Количество слов из 5-ти букв также равно 1: ОТОТО

$S_6 = S_4 + S_3 = 2$

$S_7 = S_5 + S_4 = 2$

Чистовик

$S_8 = S_6 + S_5 = 3$

$S_9 = 4$

$S_{10} = 5$

$S_{11} = 7$

$S_{12} = 9$

$S_{13} = 12$

$S_{14} = 16$

$S_{15} = 21$

$S_{16} = 28$

$S_{17} = 37$

$S_{18} = 49$

$S_{19} = 58 + 7 = 65$

$S_{20} = 79 + 7 = 86$

$S_{21} = 105 + 9 = 114$

$S_{22} = 65 + 86 = 151$

Ответ: 151 слово

5ч (продолжение)

1) $a = -1 \Rightarrow a + 1 = 0$, но у 0 один целый ненулевой делитель $= 0 \Rightarrow$ этот случай невозможен

2) $a = 0 \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow x$ может быть 1 и -1

$3x^3 + 13x^2 + 9x - 1 = 0$ $x = 1$ уже не подх $\Rightarrow$ W

3) $a = 1 \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow x_{мб} = \{1, -1, 2, -2\}$

$3x^3 + 16x^2 + 11x - 2 = 0$

$x = -1$ корень:

$$\begin{array}{l|l} -3x^3 + 16x^2 + 11x - 2 & x+1 \\ \underline{3x^3 + 3x^2} & 3x^2 + 13x - 2 = 0 \\ \quad 13x^2 + 11x - 2 & D = 169 + 24 = 193 - \\ -\underline{13x^2 + 13x} & \text{иррац. число } \sqrt{D} \\ \quad -2x - 2 & W \\ -\underline{-2x - 2} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

4) $a = 2$: $a + 1 = 3 \Rightarrow x_{мб} = \{1, -1, 3, -3\}$

$3x^3 + 19x^2 + 13x - 3 = 0$

$x = -1$ корень

Лист 6

Лист 7

Чистовик

$$\begin{array}{l|l} -3x^3+19x^2+13x-3 & x+1 \\ \underline{3x^3+3x^2} & 3x^2+16x-3=0 \\ -16x^2+13x-3 & \\ \underline{16x^2+16x} & \\ -3x-3 & \\ \underline{-3x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

$D = 256+36 = 292 \Rightarrow$ иррац. число $\sqrt{D}$

5) $a=3$: $a+1=4 \Rightarrow x_{цб} = \{1,-1,2,-2,4,-4\}$

$3x^3+22x^2+15x-4=0$

$x=-1$ - корень:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+22x^2+15x-4 & x+1 \\ \underline{-3x^3+3x^2} & 3x^2+19x-4 \\ -19x^2+15x-4 & \\ \underline{-19x^2+19x} & \\ -4x-4 & \end{array}$$

$D = 361+48 = 409$

$\Rightarrow$ иррац число $\sqrt{D}$

6) $a=4 \Rightarrow a+1=5 \Rightarrow x_{цб} = \{1,-1,5,-5\}$

$x=-1$ - корень: $(3x^3+23x^2+19x-5):(x+1) = 3x^2+22x-5$

$D = 484+60 \Rightarrow$ иррац число $\sqrt{D}$

7) $a=5 \Rightarrow a+1=6 \Rightarrow x_{цб} = \{1,-1,2,-2,3,-3,6,-6\}$

$x=-1$ - корень: $(3x^3+28x^2+19x-6):(x+1) = 3x^2+25x-6$

$D = 625+72 = 697 \Rightarrow$ иррац число $\sqrt{D}$

7) $a=-6$. Заметим, что $x=-1$ - корень всегда (см. черновик)

~~$3x^3+(3a+13)x^2+2a$~~

$9a^2+72a+112<0$

$D = 5184-4032 = 1152 = 24^2\cdot 2$

$a_1 = \frac{-36+12\sqrt{2}}{9}$

$a_2 = \frac{-36-12\sqrt{2}}{9}$

12

Лист 7

$\cancel{3h + 2k = 22}$

$\cancel{h = 7,\ k = 0}$

$\cancel{h = 6,\ k = 2}$

$-3 + 16 - 11 - 2$

193

3

16×16

96

$+\ 16$

256

$4 \cdot 9$

22×22

44

44

$+\ 256$

36

292

12×5

60

$-3 - 13 - 3$

$22 - 3 \overset{-8}{-15} - 4$

$292 \mid 2$

$146 \mid 2$

73

73×4

292

$484 + 60$

544

72

8

19×19

171

$+\ 19$

361

16×3

48

$+\ 361$

409

409

72×2

144

$544 \mid 2$

$272 \mid 2$

$136 \mid 2$

$68 \mid 2$

$34 \mid 2$

17

$-3 + 3a + 13 - 2a - 9 - a - 1 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 & x+1 \\
\hline
-\ 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + (3a+10)x - (a+1) \\
\hline
(3a+10)x^2 + (2a+9)x - (a+1) & \\
-\ (3a+10)x^2 + 3a+10 & \\
\hline
(-a-1)x - a - 1 & \\
-\ (-a-1)x - a - 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$27 + 5$

36×9

324

$+\ 112$

436

$-\ 432$

4

72×6

432

72×4

288

$D = 9a^2 + 60a + 100 + 12a + 12 -$

$112 + 36$

148

$+\ 147$

295

$= 9a^2 + 72a + 112 \in \mathbb{Z}$

$\cancel{9 \cdot 36 - 72 \cdot 6 + 112 - 4}$

$\cancel{9 \cdot 4 - 72 \cdot 9 + 112}$

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников
„Покори Воробьёвы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
от ученицы 11„Б" класса Специализированного учебно-научного центра-школы-интерната имени А.Н. Колмогорова МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, ул. Кременчугская, д. 11
Валерии Сергеевны Цукановой

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (80) за мою работу заключительного этапа по математике.

Предполагаю, что мою задачу №4 оценили в 0 баллов, однако считаю, что в моём решении имеются верные размышления.

Решение приведено мной на листах 5, 6, 7 и приложенной странице черновика.

Прошу обратить внимание на лист 7 и приложенную страницу черновика. На них я обозначила, что $x=-1$ является корнем многочлена $3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-a-1$ при всех a, получается, что по условию задачи многочлен $3x^2+(3a+10)x-(a+1)$ (см. черновик) должен иметь хотя бы один целый корень, причём все 3 корня исходного многочлена не должны повторяться, т.е. должны быть различны.

Я рассматривала целые a из отрезка $[-6;5]$, исключая те a, при которых дискриминант $3x^2+(3a+10)x-(a+1)$ отрицателен (т.к. в этом случае $3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-(a+1)=0$ имеет только один корень $x=-1$)

Прошу обратить ваше внимание на лист 7, где я посчитала a, при которых дискриминант $3x^2+(3a+10)x-(a+1)$ равен 0. Получается, что дискриминант отрицателен при $a \in (a_2; a_1)$ (см. лист 7).

~~[illegible]~~, Следовательно, в этот интервал попадают $a \in \{-3; -4; -5\}$ => мне надо было рассмотреть только $a \in \{-6; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

На листах 6 и 7 я проверяю значения $a \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. К сожалению, при рассматривании $a=-1$ я допустила арифметическую ошибку на черновике и перенесла её же на чистовик.

У меня должно было получиться:

$a=-1$: $x=0$, $x=-1$ - корни целые ($3x^2+10x^2+7x=0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=-\frac{7}{3}$, корни различны). Далее на листах 6 и 7 я рассмотрела $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, которые не подходят.

На листе 7 я начала рассматривать $a=-6$, но из-за нехватки времени не успела довести этот случай, а именно он и приводит к верному ответу, т.к. тоже подходит:

$a=-6$: $x=\underline{-1}$ - корень

Рассмотрим $3x^2-8x+5=0$

$D=64-60=4$

$x_1=\frac{8+2}{6}=\frac{5}{3}$

$x_2=\underline{1}$

Получается, $a=-6$ подходит, т.к. у него 2 целых корня (-1 и 1) и все 3 корня (-1, 1 и $\frac{5}{3}$) различны.

Также из-за нехватки времени я не успела проверить $a=-2$: $x=-1$ - корень

Рассмотрим $3x^2+4x+1=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{-4+2}{6}=-\frac{1}{3}$

$x_2=-1$

$a=-2$ не подходит, т.к. только 2 различных корня

Выходит, что если бы у меня было совсем чуть-чуть больше времени, я бы получила, что подходит два а из двенадцати => $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, что является верным ответом.

Прошу вас, уважаемые члены апелляционной комиссии, обратить внимание на то, что я честно и самостоятельно решала олимпиаду, два предыдущих года я была призёром „Покори Воробьёвы горы!". Моя работа была сдана вовремя, без задержек, несмотря на то, что будь у меня пять-десять минут, то я бы дорешала и проверила четвёртый номер, вместо этого я потратила время из отведённых трёх часов на сканирование. Ещё раз прошу заметить, что моя работа содержит все важные выкладки для четвёртого номера, т.е. для его правильного решения. Очень жаль, что мне не хватило немного времени для проверки и доведения решения до конца.

Надеюсь, что мои мысли по четвёртой задаче могут быть оценены, я понимаю, что именно это отделяет меня от столь важного для меня призёра.

Очень-очень-очень надеюсь на понимание!

Спасибо!!!

31.05.2020

Лист 3