МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Казанцев Константин Николаевич**

Технический балл: **100**

Дата: **16 февраля 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 2-1

1. Дан квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Может ли его дискриминант быть равен: а) 2019; б) 2020?

2. Велотрек имеет форму окружности. Из его диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста, которые двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями. Сколько полных кругов проедет каждый велосипедист до того момента как они поравняются первый раз после старта, если отношение их скоростей равно $\frac{32}{31}$.

3. Для каждого a решите уравнение $(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$.

4. Решите систему

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} y + |\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - 3\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y| = 0, \\ \sqrt{3 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y - 5 = 0. \end{cases}$$

5. Рассматриваются все треугольники, для которых существует такое действительное число a, что произведение трех высот треугольника равно величине $7 + 2a - a^2$. Найдите наибольший возможный радиус вписанной в такой треугольник окружности.

февраль-март 2020 г.

Шифр

Черновик

0 1 2 3
0 1 0 1

$b^2 - 4ac = 2019$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \times 80 \\ \hline 1600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 14400 \end{array}$$

$60 \cdot 60 = 3600$

$40 \cdot 40 = 1600$

$$\begin{array}{r} 3600 \\ -2020 \\ \hline 1580 \end{array}$$

$1580 : 4 = 395$

$\log_2 4 = 2$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$

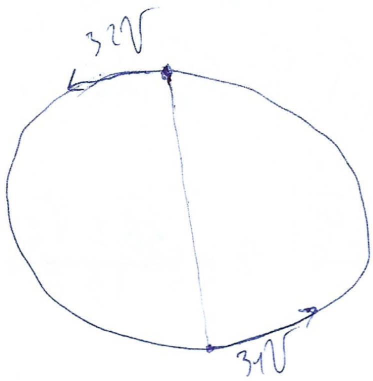
$\log_2 3 =$

$2^{-y} = \frac{1}{2^y}$

$\log_2 2$

$x^2 + 40x + 395 = 0$

$t = \frac{S}{V}$



$3^y = 2$

$3 = \sqrt[y]{2}$

$3 = 2^{\frac{1}{y}}$

$l_1 = 32 \cdot t \cdot V$

$l_2 = 31 V t$

$n_1 = \frac{32 \cdot t \cdot V}{2S} = \frac{S \cdot 32 \cdot V}{2S \cdot V}$

$n_2 = \frac{31 \cdot t \cdot V}{2S} = \frac{S \cdot 31 \cdot V}{2S \cdot V}$

$= \frac{32}{2} = 16$

$\frac{31}{2} = 15{,}5$

$\log_3 2$

$(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} =$

$= (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$(\log_2 3)^{\sqrt{x-a+1}} = \log_2 3^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

Черновик

$\log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_3 2$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -\log_2 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}$

$(\log_3 2)^{\sqrt{x^2 - a + 1}} = \cancel{\log_2 x} (\log_3 2)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$(\log_3 2)^{\sqrt{x^2-a+1}} = \log_3 2^{-\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$\sqrt{x^2-a+1} = -\sqrt{x^2+a^2-a-6}$

$\cancel{x^2-ax+1}\ x^2 - a + 1 = 0 \quad a^2 - 6 = 0$

$x^2 + a^2 - a - 6 = 0 \quad a = \sqrt{6}$

$\cancel{x = 1 \pm \sqrt{1-}}$

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}$

$-\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} y + |\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - 3\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y| = 0$

$\sqrt{3 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y - 5 = 0$

$-\frac{1}{ab} - \frac{1}{b} + \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{3}{ab}\right| = 0$

$\sqrt{3 - a + b} + b - 5 = 0$

$\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{3}{ab}\right| = \frac{1}{ab} + \frac{1}{b}$

Черновик $\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}-\frac{3}{16}$

8

$(3-tg\,x+tg\,y)\cdot ctg\,x\,ctg\,y=$

$=3ctg\,x\,ctg\,y-ctg\,y+ctg\,x$ $\quad -\frac{12}{8}+\frac{32}{8}=\frac{20}{8}$

24
×4
96
+25
121

$-\frac{4}{ab}-\frac{12}{b}+\frac{1}{a}=0$

3−

$\frac{2}{a}-\frac{4}{ab}+\frac{2}{b}-\frac{1}{a}=0$ $\quad \frac{8}{6}-\frac{8}{20}-\frac{8\cdot8\cdot3}{20\cdot6}$

$\cancel{4\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)^2=}$ $\quad \sqrt{7+tg\,x}=1-2tg\,x$

$\cancel{\left(\frac{2}{b}-1\right)\frac{1}{a}-}$ $\quad 7+k=1+4k^2-4k$

$4k^2-5k-6=0$

$25-tg^2y+10tg\,y=3-tg\,x+tg\,y$

$k=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{8}=$

22−

$1-\cancel{4}tg\,x+|tg\,y-tg\,x-3|=0$

$=\frac{5\pm11}{8}$

$tg\,y-tg\,x-3=tg\,x+1$

24
×8
182
120

$k_1=2 \quad k_2=-\frac{6}{8}$

$tg\,y=4+2tg\,x$

$\sqrt{3-tg\,x+4+2tg\,x}+4+2tg\,x-5=0$ $\quad \frac{4}{6}-\frac{8}{20}$

$\sqrt{7+tg\,x}+2tg\,x-1=0$

$\frac{1}{6}-\frac{1}{20}-\frac{8\cdot3}{20\cdot6}=20-6-8\cdot3$

Черновик

$-1-\operatorname{tg}x+|\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x-3|=0$

$\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x-3=\pm(1+\operatorname{tg}x)$ $\quad \operatorname{tg}y=4+2\operatorname{tg}x$

$-\frac{3}{4}\quad-\frac{4}{3}$

$\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x-3=-1-\operatorname{tg}x$

$\operatorname{tg}y=2$ $\quad \operatorname{ctg}y=\frac{1}{2}$ $\quad 4-\frac{6}{4}-5=$

$=\frac{6}{4}-1=\frac{1}{2}$

$\sqrt{5-\operatorname{tg}x}=3$ $\quad \operatorname{ctg}x=-\frac{1}{4}$

$5-\operatorname{tg}x=9$

$\operatorname{tg}x=-4$ $\quad -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{28}<0$

$\sqrt{3+\frac{3}{4}+4-\frac{6}{4}}=$ $\quad \sqrt{7-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ $\quad \frac{3-4-2}{8}=-\frac{3}{8}$ $\quad 4-\frac{6}{4}=\frac{16-6}{4}=$

$=\frac{10}{4}$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$ $\quad \operatorname{tg}x=2\quad \operatorname{tg}y=8$

$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{2}\quad \operatorname{ctg}y=\frac{1}{8}$ $\quad -\frac{3}{4}$ $\quad 4-\frac{6}{4}=\frac{4}{10}$

$-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=-\frac{3}{16}$ $\quad 1+\frac{6}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ $\quad 24\cdot 4=96$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{3}{16}=\frac{8-2-3}{16}=\frac{3}{16}$ $\quad -\frac{6}{4}+1=-\frac{5}{2}$

$\sqrt{3-2+8}+8-5=3+8-5$

$\sqrt{7+\operatorname{tg}x}+4+2\operatorname{tg}x-5=0$ $\quad \operatorname{tg}x=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{8}=$

$\sqrt{7+\operatorname{tg}x}=1-2\operatorname{tg}x$ $\quad =\frac{5\pm 11}{8}$

$7+\operatorname{tg}x=1+4\operatorname{tg}^2x-4\operatorname{tg}x$

$4\operatorname{tg}^2x-5\operatorname{tg}x-6=0$

Шифр

Черновик

$x+y-a+y+a=x+2y$

$\frac{4\cdot 4}{30}-\frac{4}{10}=\frac{4\cdot 4}{30}-\frac{12}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

$x(y-a)(y+a)=$

$-\frac{4}{3}-\frac{4}{10}+\frac{3\cdot 4\cdot 4}{30}=$

$x+y+z$ $=x(y^2-a)$

$x\cdot y\cdot z=p\frac{1}{8}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}a=2$

$=\frac{48-12-40}{30}=-\frac{4}{30}=$

$a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$S=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} y=2$

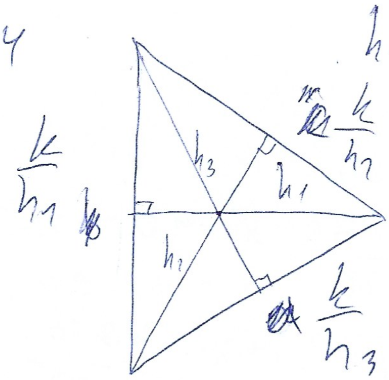
$y=\operatorname{arctg} 2+\pi k$

$x=\operatorname{arctg}-4+\pi k$

$p\in(0;8]$

$\sqrt{5-\operatorname{tg} x}=3$

$\operatorname{tg} x=-4$



$h_1\cdot h_2\cdot h_3=7+2a-a^2$

$-2a+2=0$

$1-a=0$

$a+4+r=$

$2S$

$2\ \frac{1}{2}$

$S=\frac{h_1\cdot a}{2}=\frac{h_2\cdot b}{2}=\frac{h_3\cdot c}{2}=$

$=\frac{r\cdot(a+b+c)}{2}$ $k=\frac{S}{2}2S$

$r=\frac{k}{\frac{k}{h_1}+\frac{k}{h_2}+\frac{k}{h_3}}=$

$S=\frac{h_1\cdot a}{2}$ $a=\frac{2S}{h_1}$

$\frac{p\cdot a\cdot b\cdot c}{8}=\frac{r^3\cdot(a+b+c)^3}{8}$

$=\frac{1}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}}=\frac{1}{\frac{h_2h_3+h_1h_2+h_1h_3}{h_1h_2h_3}}=\frac{h_1h_2h_3}{h_1h_2+h_2h_3+h_1h_3}=$

$=\frac{8}{x(x+a)(x+b)}$

$xyz=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}=xy^2-$

$xy^2=\frac{1}{8}+a^2$

Черновик

$x \cdot (y-a) y (y+b) = \frac{1}{8}$

$x \cdot y \cdot y \cdot k = \frac{1}{8}$

$x \cdot \frac{y}{k} \cdot y \cdot k = \frac{1}{8}$

$x + \frac{y}{k} + ky \cdot k \vee x + y + y$

$\frac{y}{k} + yk \vee 2y$ $\qquad \frac{1}{k} + k < 2$

$k^2 - 2k + 1 < 0$

$y\left(\frac{1}{k} + k\right) \vee 2y$ $\qquad \frac{1}{k} + k \vee 2$ $\qquad (k-1)^2 < 0$

$40 \times 40 = 1600$ $\qquad 2020 - 1600 = 420$ $\qquad k^2 + 40 - 105 = 0$

105 $\qquad 1600 + 420 = 2020$

Чистовик

№ 1

Рассмотрим этот трехчлен: $ax^2+bx+c=0$

a, b, c – целые $\Rightarrow D$ (дискриминант) $= b^2-4ac$

а) предположим, что $b^2-4ac=2019$

$4ac \,\vdots\, 4 \Rightarrow b^2 \underset{4}{\equiv} 2019$ (b^2 и 2019 дают ~~в~~ одинак. остатки по модулю 4)

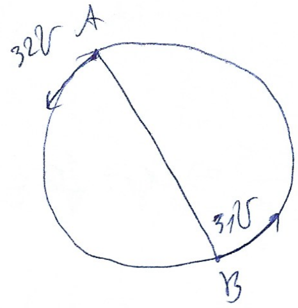
$2019 \underset{4}{\equiv} 3$. Если $b \underset{4}{\equiv} 1$, то $b^2 \underset{4}{\equiv} 1^2 \equiv 1$, если $b \underset{4}{\equiv} 2$, то $b^2 \underset{4}{\equiv} 2^2 \equiv 0$, если $b \underset{4}{\equiv} 3$, то $b^2 \underset{4}{\equiv} 3^2 \equiv 1$, если $b \underset{4}{\equiv} 0$, то $b^2 \underset{4}{\equiv} 0$

$\Rightarrow b^2$ не может давать остаток 3 при делении на 4 – противоречие, т.к. $b^2 \underset{4}{\equiv} 2019 \equiv 3$. Ответ: не может

б) пример для 2020: $x^2+40-105=0$

$D=40^2+4\cdot 105=1600+420=2020$. Ответ: может

№ 2



Пусть скорость 1 велосип. $=32V$, скорость 2 велосип. $=31V$ $\left(\frac{32V}{31V}=\frac{32}{31}\right)$

~~Тогда t (время~~

Тогда $32V\cdot t=31V\cdot t+S$ (S – ~~к~~ начальное по окружности расст. между ними, t – время встречи)

$\Rightarrow S=32Vt-31Vt=Vt \Rightarrow$ 1 велосип. проедет расст. $S_1=32V\cdot t$, 2 велосип. проедет расст. $S_2=31V\cdot t$. Изначально между ними расст. S – пол окружности $\Rightarrow$ длина всей окр. $=2S \Rightarrow$ 1 велосип. проедет полных кругов $n_1=\frac{32V\cdot t}{2S}$, 2 велосип. проедет полных кругов $n_2=\frac{31\cdot V\cdot t}{2S}$. $S=Vt \Rightarrow n_1=\frac{32\cdot V\cdot t}{2\cdot V\cdot t}=16$. $n_2=\frac{31\cdot V\cdot t}{2\cdot V\cdot t}=15{,}5$. Ответ: 1 велосип. проедет 16 полных кругов, 2 велосип. проедет 15,5 (если считать кол-во полностью пройденных, то 15) полных кругов

№3 Чистовик

$$(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$\log_4 9 = 2\cdot\log_{4} 3 = \frac{2\cdot\log_2 3}{2} = \log_2 3$$

$$\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow (\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = \left(\frac{1}{\log_3 2}\right)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}} =$$

$$= \frac{1}{(\log_3 2)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}} = (\log_3 2)^{-\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$\Rightarrow \sqrt{x-a+1} = -\sqrt{x^2+a^2-a-6}$. Т.к. все, что под корнем должно быть ≥ 0, то $\sqrt{x-a+1} \geq 0$, $-\sqrt{x^2+a^2-a-6} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x-a+1} = \sqrt{x^2+a^2-a-6} = 0$

$\Rightarrow x-a+1=0$, $x^2+a^2-a-6=0 \Rightarrow x = a-1$

$(a-1)^2+a^2-a-6=0 \Rightarrow a^2+1-2a+a^2-a-6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a^2-3a-5=0 \Rightarrow a = \frac{3\pm\sqrt{9+5\cdot2\cdot4}}{4} = \frac{3\pm7}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$a_2 = -1$ ~~Ответ~~ $\Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}-1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -1-1=-2$

Ответ: для $a = \frac{5}{2}$, $x = \frac{3}{2}$; для $a=-1$, $x=-2$

№4

1) $-\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} y + |\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - 3\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y| = 0$

2) $\sqrt{3-\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y - 5 = 0$

Разделим обе части 1) уравнения на $(\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y)$

Заметим, что $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 - \operatorname{tg} x + \frac{|\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - 3\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y|}{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|ctg x - ctg y - 3 ctg x ctg y|}{ctg x\, ctg y} = tg x + 1$ Чистовик

Заметим, что при удалении ~~знаков~~ модуля, обе части уравнения могут различаться лишь знаками:

$$\frac{ctg x - ctg y - 3 ctg x\, ctg y}{ctg x\, ctg y} = \pm(tg x + 1)$$

$\Rightarrow tg y - tg x - 3 = \pm(tg x + 1)$. Рассмотрим оба варианта:

I $tg y - tg x - 3 = tg x + 1$

$\Rightarrow tg y = 4 + 2 tg x$

рассмотрим 2) уравнение: $\sqrt{3 - tg x + tg y} + tg y - 5 = 0$

$\Rightarrow$ т.к. $tg y = 4 + 2 tg x$, то $\sqrt{3 - tg x + 4 + 2 tg x} + 4 + 2 tg x - 5 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{7 + tg x} = 1 - 2 tg x$

$\Rightarrow 7 + tg x = 1 + 4 tg^2 x - 4 tg x \Rightarrow 4 tg^2 x - 5 tg x - 6 = 0$

$\Rightarrow$ заменим $tg x$ на $t_1 \Rightarrow 4t_1^2 - 5t_1 - 6 = 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6 \cdot 4}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$. Если $t_1 = 2$, то $tg x = 2$, $tg y = 4 + 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow \sqrt{3 - tg x + tg y} + tg y - 5 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3 - 2 + 8} + 8 - 5 = 0 \Rightarrow 3 + 8 - 5 = 0 \Rightarrow 6 = 0$ – противоречие

$\Rightarrow t_1$ – не подходит. Если $t_2 = -\frac{3}{4}$, рассмотрим 1) уравнение: $-ctg x\, ctg y - ctg y + |ctg x - ctg y - 3 ctg x\, ctg y| = 0$

$|ctg x - ctg y - 3 ctg x\, ctg y| \geq 0 \Rightarrow (-ctg x \cdot ctg y - ctg y) \leq 0$

$tg x = -\frac{3}{4}$, $tg y = 4 + 2 \cdot \frac{-3}{4} = \frac{16 - 6}{4} = \frac{10}{4}$

$\Rightarrow ctg x = -\frac{4}{3}$, $ctg y = \frac{4}{10} \Rightarrow (-ctg x \cdot ctg y - ctg y) =$

$= -\frac{-4}{3} \cdot \frac{4}{10} - \frac{4}{10} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{10} - \frac{4}{10} = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{30}$ – противоречие, т.к. $(-ctg x \cdot ctg y - ctg y) \leq 0$

Рассмотрим II вариант: $tg\,y - tg\,x - 3 = -tg\,x - 1$ Чистовик

$\Rightarrow tg\,y - 3 = -1 \Rightarrow tg\,y = 2$

Рассмотрим 2) уравнение:

$\sqrt{3 - tg\,x + 2} + 2 - 5 = 0$

$\sqrt{5 - tg\,x} = 3 \Rightarrow tg\,x = -4$

для 2) уравнения $tg\,x = -4$ и $tg\,y = 2$ подходят, проверим для 1): $-(ctg\,x\,ctg\,y - ctg\,y) + |ctg\,x - ctg\,y - 3(ctg\,x\,ctg\,y)| = 0$

$ctg\,x = -\frac{1}{4}$, $ctg\,y = \frac{1}{2}$

$-ctg\,x \cdot ctg\,y - ctg\,y = -\,-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} < 0$, $|ctg\,x - ctg\,y - 3\,ctg\,x\,ctg\,y| =$

$= \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 \cdot -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{4 \cdot 2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3-2-4}{8}\right| =$

$= \left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8} \Rightarrow tg\,x = -4$ и $tg\,y = 2$ — подходят $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = arctg(-4) + \pi k$, $y = arctg(2) + \pi k$

Ответ: $x = arctg(-4) + \pi k$, $y = arctg(2) + \pi k$

№5

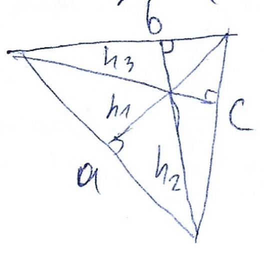
$p = 7 + 2a - a^2$. рассмотрим функцию $f(x) =$

$= 2a - a^2$: $f'(x) = 2 - 2a \Rightarrow 2 - 2a = 0 \Rightarrow (1-a) = 0$

$\Rightarrow$ + 1 −, т.е. $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 1] \Rightarrow$ при $a = 1$, $f(x)$ — максимальна.

Т.е. максимальное значение $p = 7 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 8$

Рассмотрим такие треугольники:



a, b, c — стороны, к которым проведены высоты h_1, h_2, h_3 соотв.

Заметим, что S (площадь треугольника) $= \frac{a\cdot h_1}{2} = \frac{b\cdot h_2}{2} = \frac{c\cdot h_3}{2}$

$\Rightarrow 2S = a\cdot h_1 = b\cdot h_2 = c\cdot h_3 \Rightarrow$

Чистовик

$\Rightarrow a = \frac{2S}{h_1},\ b = \frac{2S}{h_2},\ c = \frac{2S}{h_3}$

Заметим, что $S = \frac{a+b+c}{2}\cdot r$, где r – радиус впис. окр.

$$\Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{\frac{2S}{h_1}+\frac{2S}{h_2}+\frac{2S}{h_3}} = \frac{1}{\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}}$$

Заменим $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}$ на $k_1, k_2, k_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{1}{k_1+k_2+k_3}$ – максимально (наиб. радиус.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (k_1+k_2+k_3)$ должно быть минимально

Заметим, что $p \in (0; 8]$ ($p>0$, т.к. $h_1, h_2, h_3 > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{p} \in [\frac{1}{8}; +\infty) \Rightarrow$ т.к. $\frac{1}{h_1}\cdot\frac{1}{h_2}\cdot\frac{1}{h_3} = \frac{1}{h_1h_2h_3} = \frac{1}{p} \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1\cdot k_2\cdot k_3 = \frac{1}{p} \Rightarrow k_1\cdot k_2\cdot k_3 \in [\frac{1}{8}; +\infty)$ и $k_1+k_2+k_3$ должно быть минимально $\Rightarrow k_1\cdot k_2\cdot k_3 = \frac{1}{8}$ (мин. знач. из возможных)

Заметим, что, чтобы минимизировать $(k_1+k_2+k_3)$, должно быть $k_1=k_2=k_3$, предположим, что это не так. Тогда заметим, что есть такое $d \neq 1$, ~~k~~ и m, что $k_2 = \frac{m}{d}$ и $k_3 = m\cdot d \Rightarrow$ ~~если~~ $k_1\cdot k_2\cdot k_3 = k_1\cdot d \Rightarrow$ если приравнять k_2 и k_3 к m, то $k_1\cdot k_2\cdot k_3$ не изменится. Рассмотрим сумму: $k_1 + \frac{m}{d} + md$ и $k_1 + m + m$. Предположим, что $k_1 + \frac{m}{d} + md < k_1 + m + m$

$\Rightarrow \frac{m}{d} + md < 2m \Rightarrow m\left(\frac{1}{d}+d\right) < 2m \Rightarrow \frac{1}{d} + d < 2$

$\Rightarrow d^2 - 2d + 1 < 0 \Rightarrow (d-1)^2 < 0$ – противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = k_3,\ k_1\cdot k_2\cdot k_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$