



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зезин Антон Кириллович**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 4)x^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№ 4 Числовик

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \quad aq^4 \quad aq^5$$

$$\frac{a}{4}(1+q+q^2+q^3) = 15$$

$$\frac{a}{4}(q^2+q^3+q^4+q^5) = 60 = 15q^2$$

$$q^2 = 4$$

$$q = \pm 2$$

$$\frac{a}{4} q = 2$$

$$\frac{a}{4} \cdot 15 = 15$$

$$a = 4$$

$$aq^5 = 128$$

$$q = -2$$

$$\frac{a}{4} \cdot (-5) = 15$$

$$a = -12$$

$$aq^5 = -12(-32) = 384$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 12 \\ \hline 64 \\ + 32 \\ \hline 384 \end{array}$$

Ответ: 128; 384.

N2

Умножение

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$$

~~60/61~~

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$$

$$\pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \pi x &= \frac{\pi x}{60} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x \left(1 - \frac{1}{60}\right) &= 2\pi k \\ x \left(1 - \frac{1}{60}\right) &= 2k \\ x &= \frac{60}{59} \cdot 2k \end{aligned}$$

$$\pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x = \pi - \frac{\pi x}{60} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{59}{60} &= 2k \\ x \cdot \frac{61}{60} &= 1 + 2m \end{aligned}$$

Очевидно, что минимальным
расстояние будет между
корнями разных серий

$$\begin{aligned} x &= \frac{120}{59} k \\ x &= \frac{60}{61} + \frac{120}{61} m \end{aligned}$$

$$x = \frac{60}{61} + 120 \left(\frac{m}{61} - \frac{k}{59} \right) = \frac{60}{61} + 120 \frac{59m - 61k}{61 \cdot 59}$$

$$\frac{60}{61} + 120 \frac{59m - 61k}{61 \cdot 59}$$

$$x = \frac{60}{61} + 120 \frac{59m - 61k}{61 \cdot 59}$$

$$N_2(\text{Продукты}) \quad \frac{60}{61} \left(1 + 2 \left(m - \frac{61}{59} k \right) \right) = f \quad \text{Числовик}$$

$$\frac{61}{59} = 1 + \frac{2}{59}$$

$$k = 15$$

$$m = 15$$

$$1 = f = \frac{60}{61} \left(1 + 2 \cdot \left(15 - 15 \cdot \frac{30}{59} \right) \right) =$$

$$= \frac{60}{61 \cdot 59} = \frac{60}{3599} = \frac{1}{60 - \frac{1}{60}}$$

чтобы f было минимальным нужно

выбрать такие m и k , чтобы

$$\left(m - \frac{61}{59} k \right) \text{ было как можно ближе к } -\frac{1}{2}.$$

$$\text{а т.к. } \frac{61}{59} k = k + \frac{2}{59} k \quad \text{то}$$

нужно сделать $\frac{2}{59} k$ как можно ближе

$$k \cdot \frac{1}{2} = \frac{2k}{59} = \frac{30}{59} \Rightarrow k = 15$$

$$m = 15$$

$$\frac{2k}{59} = \frac{30}{59}$$

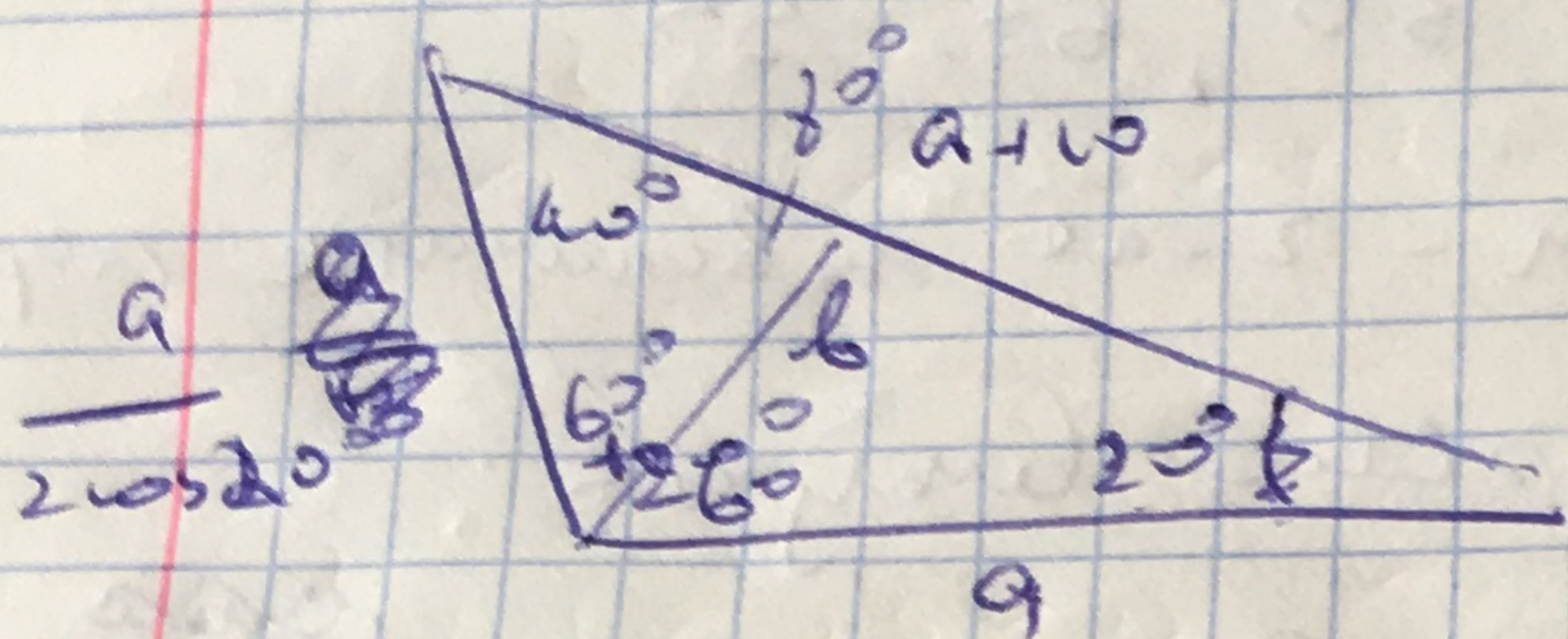
$$\text{ответ: } \frac{60}{3599}$$

② Cynari ymrobbun

$$L = 20^\circ$$

yuan $L:2L:6L$

$$20^\circ:40^\circ:120^\circ$$



$$\text{No } \Gamma \text{ unyab: } \frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{a+b}{\sin 20^\circ}$$

$$a \sin 60^\circ = a \sin 40^\circ + b \sin 40^\circ$$

$$a = \frac{b \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 40^\circ} = \frac{10}{\frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} - 1}$$

b - Succeripua

$$\frac{b}{\sin 40^\circ} = \frac{a}{2 \cos 20^\circ \cos 30^\circ}$$

$$b = a \frac{\sin 40^\circ}{2 \cos 20^\circ \sin 60^\circ} = a \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{10 \sin 40^\circ \sin 20^\circ}{(\sin 60^\circ - \sin 40^\circ) \sin 60^\circ} = \frac{5 \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ (\sin 60^\circ - \sin 40^\circ)}$$

$$\frac{5}{\cos 40^\circ (\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ} - 2 \cos 20^\circ)} = \frac{5}{\cos 40^\circ (3 - 4 \sin 20^\circ - 2 \cos 20^\circ)}$$

N3 Кусок бум

① Кусок бум

$l: 2d: 3d$

$\alpha = 30^\circ$

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

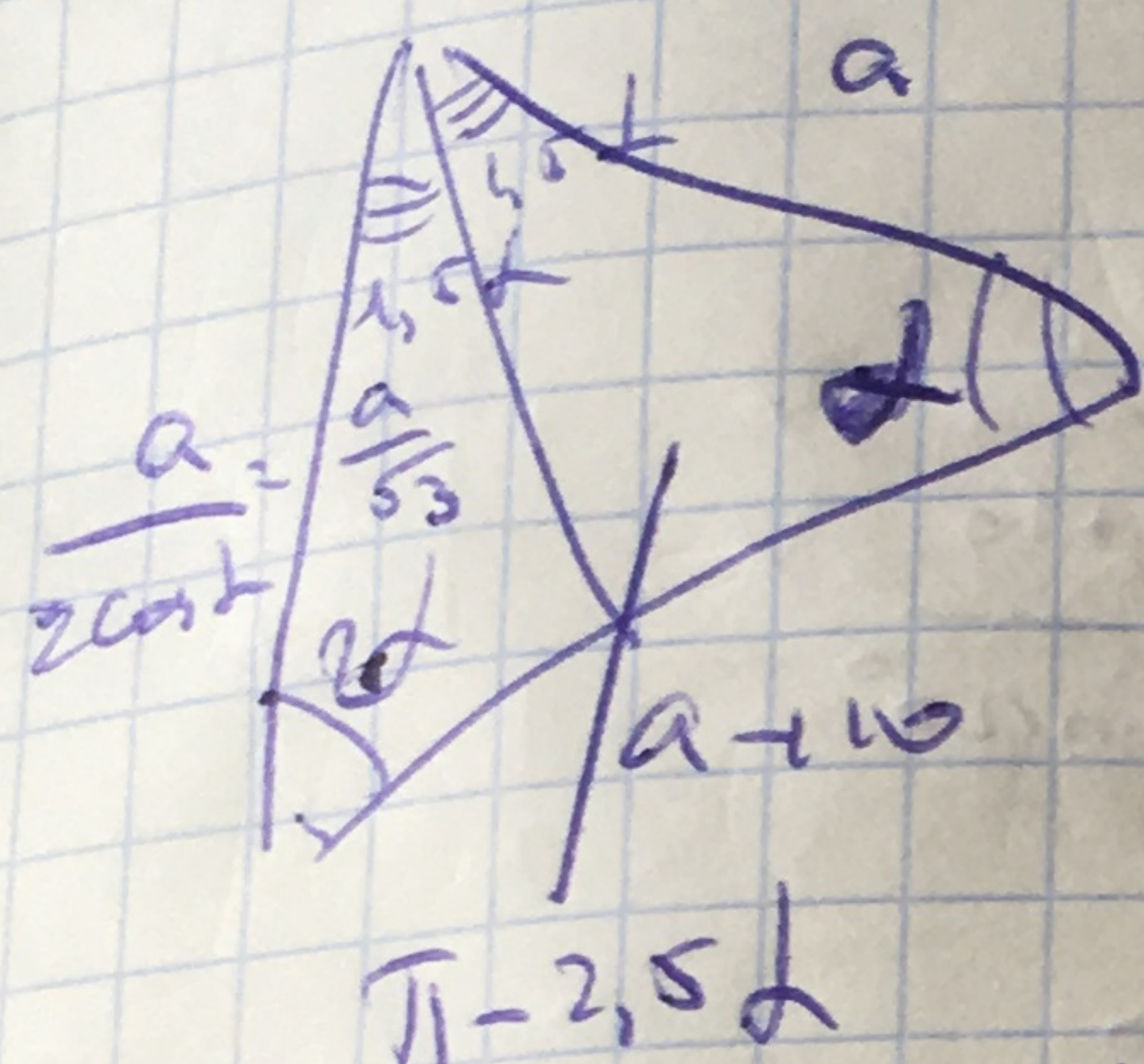
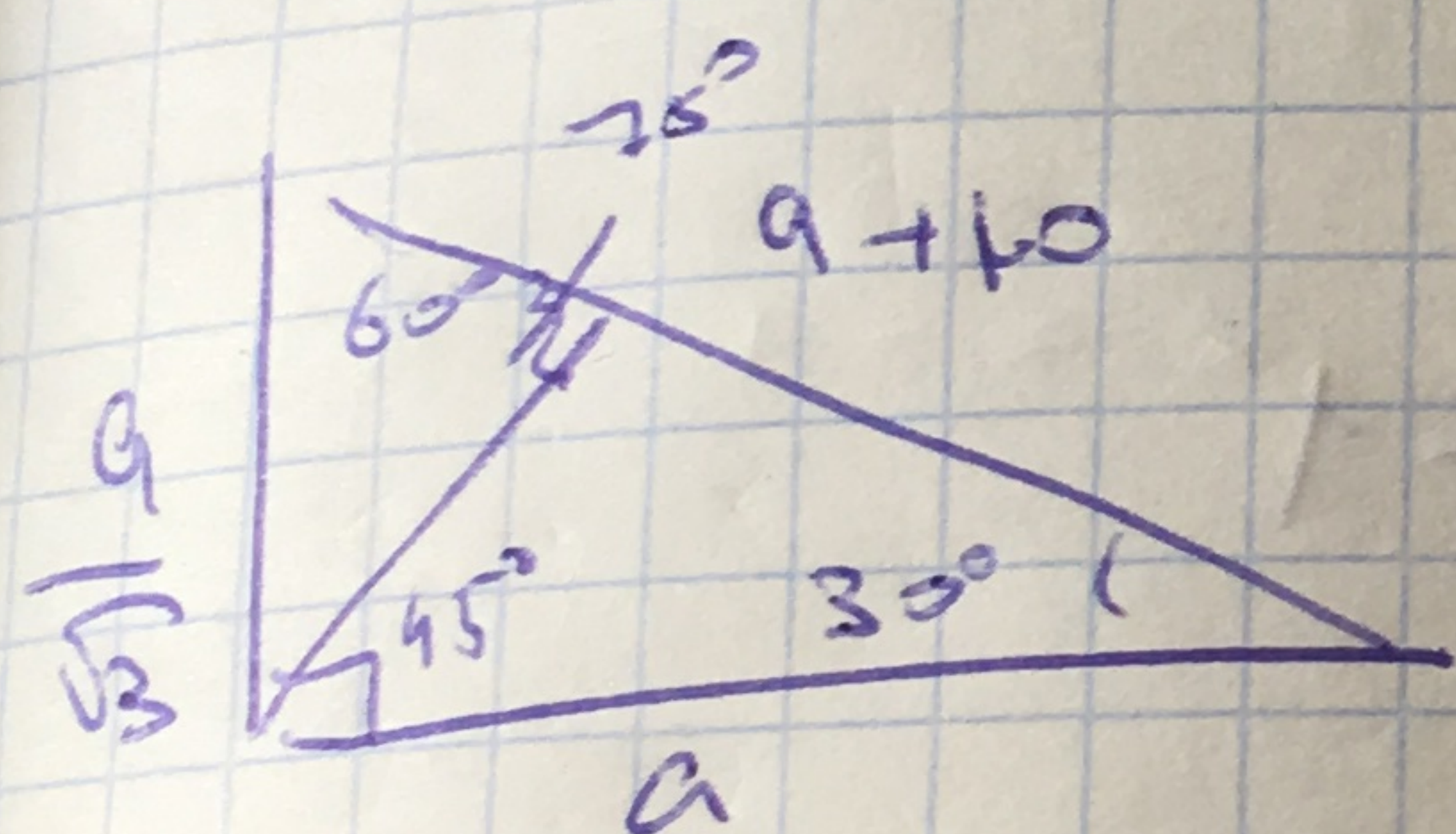


Рисунок а - 2-ая известная сторона

По Теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta}, \text{ где } x - \text{нужная сторона}$$

$$b = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$



$$\frac{2a}{\sqrt{3}} = a + 10$$

$$a = \frac{10}{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{10\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

По Т. синусов:

$$\frac{a}{\sqrt{3} \sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}, \text{ где } b - \text{нужная сторона}$$

$$b = \frac{a \sin 60^\circ}{\sqrt{3} \sin 75^\circ} = \frac{2a}{3}$$

$$\sin 75^\circ = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{80\sqrt{3}}{3\sqrt{2}(2 + \sqrt{3} - 3)} = \frac{80\sqrt{3}}{3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{80}{\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{80}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

4)

умножим

$$3x^2 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a-2 = 0$$

$$3x^2 + 4x^2 + 3x + 2 - a(3x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ 3x^2 + x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x \\ - x^2 + x \\ \hline 2x + 2 \\ - 2x + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 1 \\ - 3x^2 + 3x \\ \hline -x - 1 \\ - x - 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ 3x - 1 \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow x = -1$ — корень
или можно а

$$(x+1)(3x^2 + x + 2 - a(3x-1)) = 0$$

$$3x^2 + x(1-3a) + 2+a = 0 \quad \text{— у этого уравнения должно быть 2 корня}$$

$$D = 1 - 6a + 9a^2 - 24 - 12a =$$

$$= 9a^2 - 18a - 23 \quad (*)$$

$$\sqrt{9a^2 - 18a - 23}$$

и тогда бы 1
у него
кратности
— 1

$$(4) \quad 3a^2 - 18a - 23 = 0 \quad \text{дискриминант}$$

$$D = 324 + 828 = 1152$$

$$1152 = 4 \cdot 288 = 16 \cdot 72 = 2^7 \cdot 3^2$$

~~1152~~

$$a = \frac{18 \pm 24\sqrt{2}}{18} = 1 \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a \approx -0,862 \\ a \approx 2,862 \end{cases}$$

$$a \in [0; 2] \quad \text{не подходит}$$

$$\text{пусть } 3b^2 + 4(1-3a) + 2 + a$$

$$x = -1 - \text{не подходит}$$

тогда

$$3 - 1 + 3a + 2 + a = 0$$

$$4a = -4$$

$$a = -1$$

$$\Rightarrow a = -1$$

$$a = -5$$

2

$$3b^2 + 16b - 3 = 0$$

$$b^2 + \frac{16}{3}b - 1 = 0$$

$$D = \frac{256}{9} + 4 = \frac{292}{9}$$

$$b = \frac{16}{3} \pm \frac{\sqrt{292}}{3} \quad \text{не подходит}$$

$$3b^2 + 13b - 2 = 0$$

$$D = 169 + 24 = 193$$

$$b = \frac{-13 \pm \sqrt{193}}{6} \quad \text{не подходит}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 12 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 228 \\ \times 36 \\ 73 \\ \hline 108 \\ 72 \\ \hline 828 \\ \times 39 \\ 39 \\ \hline 133 \\ 244 \\ \hline 1532 \\ 133 \\ \hline 1862 \end{array}$$

4 условия

$$a = -3$$

$$3x^2 + 10x - 1 = 0$$

$$D = 112$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{112}}{6} \text{ - не целые}$$

$$a = 3$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$D = 64 - 60 = 4$$

$$x = \frac{8 \pm 2}{6} = \frac{10}{6}; 1$$

$$a = 5$$

$$3x^2 - 14x + 7 = 0$$

$$D = 196 - 84 = 112$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{112}}{6} \text{ - не целые}$$

$$a = -2$$

$$3x^2 + 7x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -\frac{7}{3}$$

$$a = 4$$

$$3x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$D = 121 - 72 = 49$$

$$x = \frac{11 \pm 7}{6} = 3; \frac{4}{3}$$

$$a = 6$$

$$3x^2 - 17x + 8 = 0$$

$$D = 289 - 96 = 193$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{193}}{6} \text{ - не целые}$$

вероятно

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$\frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12}$$

$$\frac{12}{2} = 6$$

NS

$$f(20) = f(18) + f(17)$$

$$f(n+3) = f(n+1) + f(n)$$

$$f(1) = 1 : A$$

$$f(2) = 0 : \text{AA}$$

$$f(3) = 1 : ABA$$

$$f(4) = f(1) + f(2) = 1$$

$$5 : 1$$

$$6 : 2$$

$$7 : 2$$

$$8 : 3$$

$$9 : 4$$

$$10 : 5$$

$$11 : 7$$

$$12 : 9$$

$$13 : 12$$

$$14 : 16$$

$$15 : 21$$

$$16 : 28$$

Число букв

Пусть $S(n)$ - количество слов из n букв,

тогда

любой слог можно представить

$$\left[\begin{array}{l} \text{либо } S(n) = AB + S(n-2) \\ \text{либо } S(n) = ABB + S(n-3) \end{array} \right.$$

тогда выполняется соотношение

где $f(n)$ - количество слов из n букв

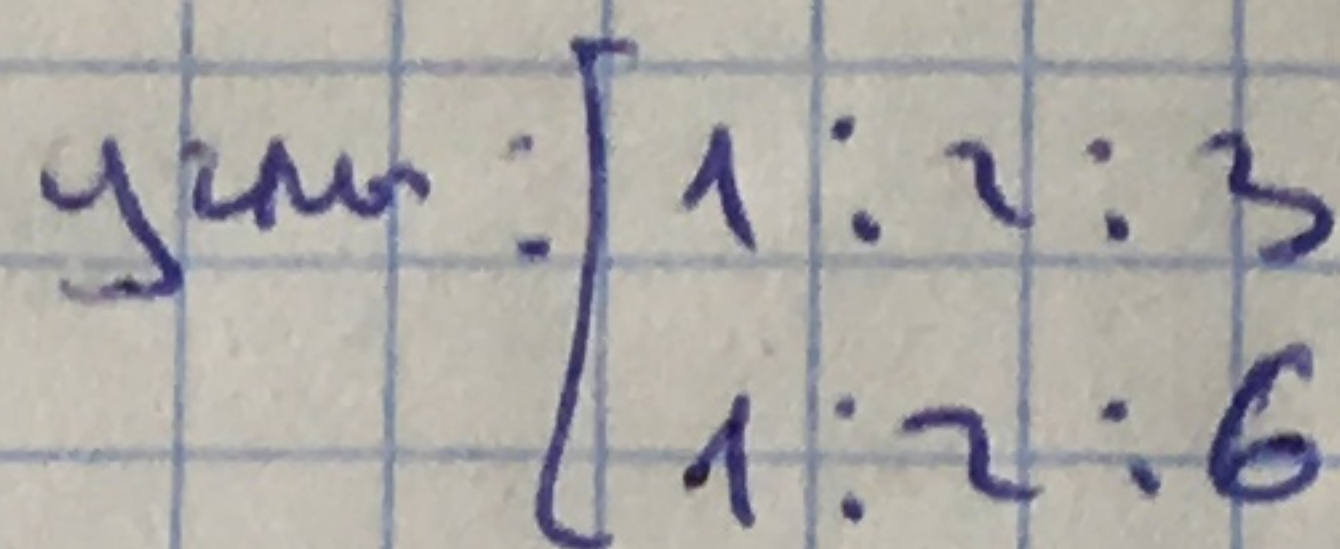
$$17 : 37$$

$$18 : 49$$

$$19 : 65$$

$$20 : 86$$

Ответ: 86



$$\frac{a}{\sin d} = \frac{b}{\sin d}$$

$$x = \frac{9}{2 \cos x}$$

$$\frac{9}{1052}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$2a \cos L + 2c \cos L - 3a + 4a \sin^2 L = 0$$

$$(3.45 \times 10^{-2}) \text{ rad}$$

$$a = - \frac{20 \cos \angle}{2 \cos \angle + 4 \sin^2 \angle - 3}$$

$$= \frac{20605}{20605 + 514 - 365} \approx 1$$

$z = 2 + 5i + 10i^2 - 3\cos t$

$$\frac{a}{\cos 2,5^\circ} = \frac{b}{\sin 2}$$

$$b = \frac{\sin 2}{\cos 2,5^\circ} \quad a = - \frac{20 \cos 2 \sin 2}{\cos 45^\circ (2 \cos 2 + 4 \sin 2 - 3)}$$

$$-20 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-20 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\cos 25^\circ (\sqrt{3} + 1 - 3)}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3}) \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3}) \sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$2 \cos^2 75^\circ + 1 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$d = 45 \sin 2$$

124

$$3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a+2 = 0$$

$$x^2(7-3a) - (2a-5)x + a+2 = 0$$

$$D = 4a^2 - 12a + 9 - 4(a+2)(7-3a) =$$

$$= 4a^2 - 12a + 9 - 28a + 12a^2 - 56 + 24a =$$

$$= 16a^2 - 16a - 47$$

$$a = -2 \quad b = 0$$

$$3x^2 - (3a-4)x + (a+3) = 0$$

$$D = 9a^2 - 24a + 16 + 12(a+3) =$$

$$= 9a^2 - 24a + 16 + 24a + 36 =$$

$$= 9a^2 - 20 = 16$$

$$x = \frac{3a-4 \pm 4}{6} = -1; -\frac{1}{3}$$

$$3b^3 + 4b^2 + 3b + 4 - 3ab^2 - 2ab + a = 0 \Rightarrow$$

$$(3b^2 + 4)(b^2 + 1) - a(3b^2 + 2b + 1) - 2 = 0$$

$$3b^3 + 4b^2 + 3b + 2 -$$

$$4 + 12 = 16$$

$$b = \frac{-2 \pm 4}{6} = -1, \frac{1}{3}$$

$$b = -1 \quad \text{при нуле } a$$

$$\begin{array}{r} 3b^2 - 2b - 1 \quad | \quad b+1 \\ 3b^2 + 3b \\ \hline -5b - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3b^3 + 4b^2 + 3b + 2 \quad | \quad b+1 \\ 3b^3 + 3b^2 \\ \hline b^2 + 3b + 2 \\ \hline b^2 + b \\ \hline 2b + 2 \\ \hline 2b + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(b+1)(3b^2 + b + 2)$$

$$- a(b+1)(b - \frac{1}{3}) = 0$$

$$3b^2 + b + 2 - a(b - \frac{1}{3}) = 0$$

$$3b^2 + b + 2 - ab + \frac{a}{3} = 0$$

$$3b^2 + 3b + \frac{4}{3} = 0$$

$$3b^2 + b(1-a) + 2 + \frac{a}{3} = 0$$

$$D = 1 - 2a + a^2 - 12(2 + \frac{a}{3}) =$$

$$= 1 - 2a + a^2 - 24 - 4a = a^2 - 6a - 23$$

$$24 + 4 \cdot 23 = 4 \cdot 29$$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{19}}{2} = 3 \pm \sqrt{19}$$

$$(b+1)(3b^2 + b + 2) - a(b+1)(3b-1) = 0$$

$$3x^2 - 1x + 2 - 3ay + a = 0$$

$$3x^2 + x(1-3a) + 2a = 0$$

$$\Delta = 1 - 6a + 9a^2 - 24a = 9a^2 - 30a + 1$$

$$x = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-30a+1}}{6}$$

$$900 - 36 = 864$$

$$\sqrt{864} = 29.3938769131$$

$$18(12\sqrt{6})^2$$

$$a = \frac{30 \pm 12\sqrt{6}}{18} = \frac{5 \pm 2\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{5 \pm 2\sqrt{6}}{3} = \frac{5}{3} \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$3x^2 + x + 2 - a(3x-1) = 0$$

*

Презседателю апелляционной
комиссии

олимпиады школьников

„Покори Воробьевы горы!“

Ректору МГТУ имени М.В. Ломоносова

академику В.А. Садовничеву

ученика 11 класса „О“

ГБОУ школы 1547 г. Москвы

Антон Кириллович Зезина

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы 90 за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что задачи 1, 2, 4, 5 я решил верно, в задаче 3 случай, когда углы $20^\circ:40^\circ:120^\circ$, я также рассмотрел верно, и мой ответ равен ответу в условии, а в случае, когда углы равны $30^\circ:60^\circ:90^\circ$, в моей работе есть запись:
$$b = \frac{a \sin 60^\circ}{\sqrt{3} \sin 75^\circ} \quad (\text{также выше указано, что } a = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}})$$

после чего я ~~допустил~~ допускаю ошибку в преобразовании и пришёл к неверному ответу. У меня даже в черновике (файл „Черновик (2)“) есть верное преобразование этого выражения и верный ответ. Считаю, что должен получить максимальный балл как за задачу 3, так и за всю работу в целом.

31.05.2020

