МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Губенко Олеся Леонидовна**

Технический балл: **80**

Дата: **16 февраля 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 2-1

1. Дан квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Может ли его дискриминант быть равен: а) 2019; б) 2020?

2. Велотрек имеет форму окружности. Из его диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста, которые двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями. Сколько полных кругов проедет каждый велосипедист до того момента как они поравняются первый раз после старта, если отношение их скоростей равно $\frac{32}{31}$.

3. Для каждого a решите уравнение $(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$.

4. Решите систему

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} y + |\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - 3 \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y| = 0, \\ \sqrt{3 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y - 5 = 0. \end{cases}$$

5. Рассматриваются все треугольники, для которых существует такое действительное число a, что произведение трех высот треугольника равно величине $7 + 2a - a^2$. Найдите наибольший возможный радиус вписанной в такой треугольник окружности.

февраль-март 2020 г.

Шифр

Чистовик

№1.

$ax^2+bx+c=0$

~~$D=b^2-4ac$~~

~~а) b^2-4ac~~

$\begin{cases} D=b^2-4ac \\ a,b,c\in Z \end{cases}$

а) $b^2-4ac=2019$

$b^2=2019+4ac$

$b=\sqrt{2019+4ac}=2\sqrt{504{,}75+ac}$

$\frac{b}{2}=\sqrt{504{,}75+ac}$

при $b\in Z$: $\frac{b}{2}\in Z$ или $\frac{b}{2}$ имеет вид $(x{,}5)$ (где x - целая часть)

при $a,c\in Z$: $ac\in Z$

$(504{,}75+ac)$ имеет вид $(y{,}75)$ (где y - целая часть)

$\left(\frac{b}{2}\right)^2=504{,}75+ac$

$((x{,}5)\cdot(x{,}5))$ имеет вид $(k{,}25)$ (где k - целая часть)

$k{,}25\neq y{,}75$ значит, дискриминант $ax^2+bx+c=0$, где $a,b,c\in Z$ не может быть равен 2019.

б) $b^2-4ac=2020$

$b^2=2020+4ac$

$b=2\sqrt{505+ac}$

при $a\in Z$, $c\in Z$: $ac\in Z$

$505+ac\in Z$

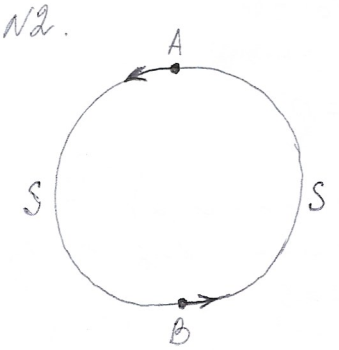
можно подобрать a, c так, чтобы $\sqrt{505+ac}\in Z$

(при $a=5$; $b=60$; $c=79$: $3600-4\cdot5\cdot79=2020$)

Значит, дискриминант $ax^2+bx+c=0$, где $a,b,c\in Z$ может быть равен 2020.

Ответ: а) не может; б) может.

№2.



Пусть длина велотрека l

$\frac{l}{2}=S$

t - время, которое велосипедисты ехали до встречи

V_A – V велосипедиста A

V_B – V велосипедиста B

Чистовик

$\frac{v_A}{v_B} = \frac{32}{31}$ по условию

$v_B = \frac{31}{32} v_A$

$v_A \cdot t$ – расстояние, кот. проехал велосипедист A до встречи

$v_B \cdot t$ – расстояние, кот. проехал велосипедист B до встречи

т.к. сначала велосипедисты находились друг от друга на расст. S, то:

$v_A t = S + v_B t$

$v_A t = \frac{l}{2} + \frac{31}{32} v_A t$

$\frac{1}{32} v_A t = \frac{l}{2}$

$v_A t = 16l$ (то есть, велосипедист A проехал 16 кругов до встречи)

$v_B t = 16l - \frac{l}{2} = 15{,}5l$ (велосипедист B проехал 15,5 кругов до встречи)

Ответ: 16 ; 15,5.

N3.

$(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}} = (\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$\frac{1^{\sqrt{x-a+1}}}{(\log_2 3)^{\sqrt{x-a+1}}} = (\log_2 3)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$(\log_2 3)^{-\sqrt{x-a+1}} = (\log_2 3)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$\underbrace{-\sqrt{x-a+1}}_{\leq 0} = \underbrace{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}_{\geq 0}$

~~Когда~~ Равенство возможно при $\begin{cases} -\sqrt{x-a+1} = 0 \\ \sqrt{x^2+a^2-a-6} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-a+1=0 \\ x^2+a^2-a-6=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = x+1 \quad (1) \\ x^2+(x+1)^2-(x+1)-6=0 \quad (2) \end{cases}$

2) $x^2+x^2+2x+1-x-1-6=0$

$2x^2+x-6=0$

$D = 1+48 = 7^2$

$\underline{x_1 = 1{,}5} \quad \underline{x_2 = -2}$

Шифр

Чистовик

1) $a = 1{,}5 + 1$ $\qquad$ $a = -2 + 1$

$a = 2{,}5$ $\qquad$ $a = -1$

т.е.: при $a = 2{,}5$: $x = 1{,}5$

при $a = -1$: $x = -2$

при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$: решений нет

Ответ: при $a = 2{,}5$: $x = 1{,}5$;

при $a = -1$: $x = -2$;

при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$: решений нет

N4.

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y - \operatorname{ctg}y + |\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y - 3\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y| = 0 \\ \sqrt{3 - \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y} + \operatorname{tg}y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y - 3\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y| = \operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}y \\ \sqrt{3 - \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y} = 5 - \operatorname{tg}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}y \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y - 3\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y = \operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}y \\ \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y - 3\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y = -\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y - \operatorname{ctg}y \end{array}\right. \\ 5 - \operatorname{tg}y \geq 0 \\ 3 - \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = (5 - \operatorname{tg}y)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}y \geq 0 \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}x - 4\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y - 2\operatorname{ctg}y = 0 \quad (2) \\ \operatorname{ctg}x - 2\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}y = 0 \quad (3) \end{array}\right. \\ \operatorname{tg}y \leq 5 \quad (4) \\ \operatorname{tg}^2 y - 11\operatorname{tg}y + 22 + \operatorname{tg}x = 0 \quad (5) \\ \sin y \neq 0 \quad (6) \\ \cos y \neq 0 \quad (7) \\ \sin x \neq 0 \quad (8) \\ \cos x \neq 0 \quad (9) \end{cases}$$

1) $\operatorname{ctg}y(\operatorname{ctg}x + 1) \geq 0$

$\begin{cases} \operatorname{ctg}y \geq 0 \\ \operatorname{ctg}x + 1 \geq 0 \end{cases}$ (1.1) $\quad$ или $\quad$ $\begin{cases} \operatorname{ctg}y \leq 0 \\ \operatorname{ctg}x + 1 \leq 0 \end{cases}$ (1.2)

3) $\operatorname{ctg}x(1 - 2\operatorname{ctg}y) = 0$

$\operatorname{ctg}x = 0$ $\qquad$ $1 - 2\operatorname{ctg}y = 0$

Чистовик

$\cos x = 0$
не уд. (9)

$ctg y = \frac{1}{2}$
$tg y = 2$ (уд. (4))
5) $4 - 22 + 22 + tg x = 0$
$tg x = -4$
$ctg x = -\frac{1}{4}$
1.1) проверка: $\begin{cases} \frac{1}{2} \geq 0 \\ -\frac{1}{4} + 1 \geq 0 \end{cases}$
верно

$\Rightarrow \begin{cases} tg x = 4 \\ tg y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = arctg\, 4 + \pi n, n \in Z \\ y = arctg\, 2 + \pi k, k \in Z \end{cases}$

2) $ctg x - 4 ctg x\, ctg y - 2 ctg y = 0 \quad | : ctg y \neq 0$

$\frac{ctg x}{ctg y} - 4 ctg x - 2 = 0$

$\frac{tg y}{tg x} = 4 ctg x + 2 \quad | \cdot tg x \neq 0$

$tg y = 4 + 2 tg x$

5) $tg^2 y - 11 tg y + 22 + tg x = 0$
$(4 + 2tg x)^2 - 11(4 + 2 tg x) + 22 + tg x = 0$
$16 + 16 tg x + 4 tg^2 x - 44 - 22 tg x + 22 + tg x = 0$
$4 tg^2 x - 5 tg x - 6 = 0$
Пусть $tg x = t$
$4t^2 - 5t - 6 = 0$
$D = 25 + 96 = 11^2$
$t_1 = 2 \quad t_2 = -\frac{3}{4}$

$tg x = 2 \qquad tg x = -\frac{3}{4}$
$tg y = 8 \qquad tg y = 2{,}5 = \frac{5}{2}$
не уд. (4) $\qquad ctg y = \frac{2}{5}$
$ctg x = -\frac{4}{3}$
1.1) проверка: $\begin{cases} \frac{2}{5} \geq 0 \\ -\frac{1}{3} \geq 0 \end{cases}$ не верно

Шифр

~~Все~~ Чистовик

$\Rightarrow$ корнями ур-ния явл. только $\begin{cases} x = arctg\,4 + \pi n, n \in Z \\ y = arctg\,2 + \pi k, n \in Z \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = arctg\,4 + \pi n, n \in Z \\ y = arctg\,2 + \pi k, k \in Z \end{cases}$

Черновик

$$\begin{cases} -ctgx\,ctgy - ctgy + |ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy| = 0 \\ \sqrt{3-tgx+tgy} + tgy - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy| = ctgx\,ctgy + ctgy \\ \sqrt{3-tgx+tgy} = 5 - tgy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} ctgx\,ctgy + ctgy \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy = ctgx\,ctgy + ctgy \\ ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy = -ctgx\,ctgy - ctgy \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 5 - tgy \geq 0 \\ 3 - tgx + tgy = 25 - 10tgy + tg^2y \end{cases} \end{cases}$$

ОДЗ:

$3 - tgx = (5-tgy)^2 + tgy$

$$\begin{cases} ctgx\,ctgy + ctgy \geq 0 \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} ctgx - 2ctgy - 4ctgx\,ctgy = 0 \quad (2) \\ ctgx - 2ctgx\,ctgy = 0 \quad (3) \end{array}\right. \\ \cancel{5 - tgy \geq 0} \quad tgy \leq 5 \quad (4) \\ tg^2y - 11tgy + 22 + tgx = 0 \quad (5) \end{cases}$$

$ctgx - 2ctgy - 4ctgx\,ctgy = 0$

$\frac{ctgx}{ctgy} - 4ctgx - 2 = 0$

$\frac{tgy}{tgx} = 2(2ctgx + 1)$

$tgy = 2tgx(2ctgx + 1)$

$tgy = 4 + 2tgx$

1) $ctgy(ctgx + 1) \geq 0$

$\begin{cases} ctgy \geq 0 \\ ctgx + 1 \geq 0 \end{cases}$ (1.1) или $\begin{cases} ctgy < 0 \\ ctgx + 1 < 0 \end{cases}$ (1.2)

3) $ctgx(1 - 2ctgy) = 0$

$ctgx = 0$

не уд $\cos x \neq 0$

$1 - 2ctgy = 0$

$ctgy = \frac{1}{2}$

$tgy = 2$ (уд. 4)

5) $4 - 22 + 22 + tgx = 0$

$4 + tgx = 0$

$tgx = -4$

$ctgx = -\frac{1}{4}$

1.1) проверка уд (1.1)

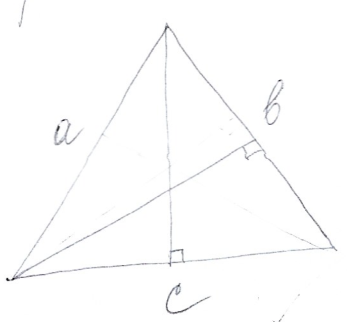
$\Rightarrow \begin{cases} tgy = 2 \\ tgx = 4 \end{cases}$

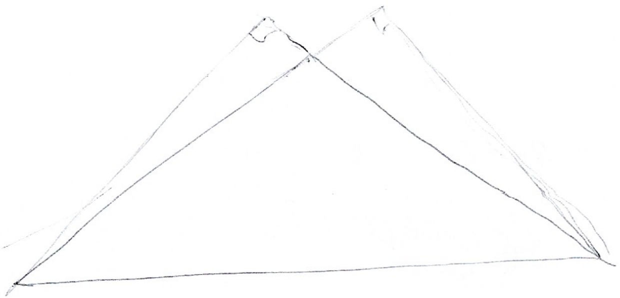
$y = arctg2 + \pi n, n \in Z$

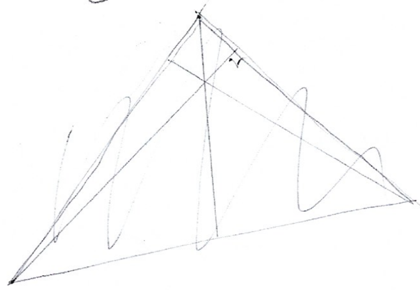
$x = arctg4 + \pi k, k \in Z$

2) $ctgx - 2ctgy - 4ctgx\,ctgy = 0$

Черновик







$h_1 h_2 h_3 = 7+2a-a^2$

$x^2-x-6=0$

$\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=3 \end{cases}$

$x_1 x_2 = c$

$x_1+x_2=-b$

$ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

$b^2-4ac=2019$

$a, b, c \in Z$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{2019}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{2019}}{2a}$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\cancel{D=\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}$

$\begin{cases} b^2-4ac=2019 \\ a, b, c \in Z \end{cases}$

$b^2=2019+4ac$

$ac=\frac{b^2-2019}{4}$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{2019}}{}$

$50\cdot50$

2500

$48 \times 48 = 384 + 192\_ = 2304$

$\begin{cases} x_1 x_2=\frac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1=\frac{-b+\sqrt{2019}}{2a} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{2019}}{2a} \end{cases}$

$\frac{(-b+\sqrt{2019})(-b-\sqrt{2019})}{4a^2}=\frac{c}{a}$

$(-b+\sqrt{2019})(-b-\sqrt{2019})=4ac$

$b^2+\sqrt{2019}\cdot(-b)-\sqrt{2019}(-b)-2019=4ac$

$b^2-4ac=2019$

$ax^2+bx+c=0$

$D=2019=b^2-4ac$

$b^2+2019=4ac$

Черновик

$$\begin{cases} -ctgx\,ctgy - ctgy + |ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy| = 0 \quad (1) \\ \sqrt{3 - tgx + tgy} + tgy - 5 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

~~где |ctgx−ctgy−3ctgx~~ ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \end{cases}$

1) $|ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy| = ctgx\,ctgy + ctgy$

$$\begin{cases} ctgx\,ctgy + ctgy \geqslant 0 \quad (1.) \\ \left[\begin{array}{l} ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy = ctgx\,ctgy + ctgy \quad (2.) \\ ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy = -ctgx\,ctgy - ctgy \quad (3.) \end{array}\right. \end{cases}$$

3.) $ctg\,x - 2ctgx\,ctgy = 0$

$ctgx(1 - 2ctgy) = 0$

$ctgx = 0$

$\cos x = 0$

не уд. ОДЗ.

$1 - 2ctgy = 0$

$ctgy = \frac{1}{2}$

$tgy = 2 \quad y = arcctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$

1.) $ctgx \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geqslant 0$

$ctgx \geqslant -1 \; (*)$

2) $\sqrt{5 - tgx} = 3$

$5 - tgx = 9$

$tgx = -4$

~~arcctgx~~ $ctgx = -\frac{1}{4}$ уд $(*)$

2) $\cancel{\sqrt{3 - tgx + tgy} + tgy - 5 = 0}$

$ctgx - ctgy - 3ctgx\,ctgy = ctgx\,ctgy + ctgy$

$ctgx - 4ctgx\,ctgy - 2ctgy = 0 \quad |: ctgy \neq 0$

$\frac{ctgx}{ctgy} - 4ctgx - 2 = 0$

$ctgx\left(\frac{1}{ctgy} - 4\right) - 2 = 0$

$ctgx(tgy - 4) - 2 = 0$

Черновик

2) $\sqrt{3-tgx+tgy} = 5-tgy$

$\begin{cases} 5-tgy \geq 0 \\ 3-tgx+tgy = 25-10tgy+tg^2y \end{cases}$

$\begin{cases} tgy \leq 5 \\ tg^2y - 11tgy + 22 + tgx = 0 \end{cases}$

$D = b^2 - 4ac = 2019$

$b^2 - 4ac = 2020$

$b^2 = 2020 + 4ac = 4(505 + ac)$

$b = 2\sqrt{505+ac}$

$395 \mid 5$
79

при $a = 5$
$b = 60$
$c = 79$

$7{,}5 \times 7{,}5$

$2019 \mid 4$ $504{,}75$

$79 \times 2 = 158$

$b^2 - 4ac = 2019$

$b = \sqrt{2019+4ac} = 2\sqrt{504{,}75+ac}$

при a, c - целое, ac - целое
при b - целое ~~...~~ ...

$$\left(\log_3 2\right)^{\sqrt{x-a+1}} = \left(\log_4 9\right)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$\frac{1}{(\log_2 3)^{\sqrt{x-a+1}}} = (\log_2 3)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$(\log_2 3)^{-\sqrt{x-a+1}} = (\log_2 3)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$$

$$\underbrace{-\sqrt{x-a+1}}_{\leq 0} = \underbrace{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}_{\geq 0}$$

равенство возможно при $\begin{cases} -\sqrt{x-a+1} = 0 \\ \sqrt{x^2+a^2-a-6} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-a+1=0 \\ x^2+a^2-a-6=0 \end{cases}$

$a = x+1$

$x^2 + (x+1)^2 - x - 1 - 6 = 0$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - x - 7 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$

$D = 1 + 48 = 7^2$

$x_1 = \frac{6}{4}$ $x_2 = -2$

$a = 2{,}5$ $a = -1$

~~Ответ~~

при $a = 2{,}5$: $x = 1{,}5$

при $a = -1$: $x = -2$

при $a \in (-\infty; -2{,}5) \cup (-2{,}5; -1) \cup (-1; +\infty)$:

решений нет

Черновик

$ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

$a,b,c\in Z$

а) $b^2-4ac=2019$

$b^2=2019+4ac$

$l=2S$

$\frac{v_1}{v_2}=\frac{32}{31}$

$31v_1=32v_2$

$v_2=\frac{31}{32}v_1$

t

$v_1t=S+v_2t$

$v_1t=\frac{l}{2}+\frac{31}{32}v_1t$

$\frac{1}{32}v_1t=\frac{l}{2}$

$v_1t=16l$ 16 кругов

$v_2t=15{,}5l$ 15,5 кругов.

N2 – ? +

$(\log_3 2)^{\sqrt{x-a+1}}=(\log_4 9)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$a^2-a-6=0$

$D=1+24=5^2$

$a_1=-2\quad a_2=3$

$(a+2)(a-3)$

$\left(\frac{1}{\log_2 3}\right)^{\sqrt{x-a+1}}=(\log_2 3)^{\sqrt{x^2+a^2-a-6}}$

$(x-a+1)(x-a+1)=x^2-ax+\cancel{ax}x-ax+a^2-a+x-a+1=$

$=x^2-2ax-2a+2x+a^2+1$

$x^2+a^2-a-6-2ax-a+2x+7$

$$\begin{cases}-\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}y+|\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-3\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y|=0 & (1)\\ \sqrt{3-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}+\operatorname{tg}y-5=0\end{cases}$$

1) $|\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-3\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y|=\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}y$

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}y>0 & (1.)\\ \left[\begin{array}{ll}\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-3\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}y & (2.)\\ \operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-3\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=-\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}y & (3.)\end{array}\right.\end{cases}$$

2.) $\operatorname{ctg}x-4\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-2\operatorname{ctg}y=0 \mid :\operatorname{ctg}x\neq0$

3.) $\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=0$

$\operatorname{ctg}x(1-2\operatorname{ctg}y)=0$

$\operatorname{ctg}x=0\qquad \operatorname{ctg}y=\frac{1}{2}$