МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Утюжников Дмитрий Александрович**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)\,?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1 Пусть первый член a, q - знаменатель прогрессии

$\Rightarrow$ первые шесть членов $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5$

Сумма с 1 по 4 $S_{1-4} = \frac{a(q^4-1)}{q-1}$

Сумма с 3 по 6 (последние 4 члена) $S_{3-6} = S_{1-6} - S_{1-2} =$

$$= \frac{a(q^6-1)}{q-1} - \frac{a(q^2-1)}{q-1} = \frac{a(q^6-1)-a(q^2-1)}{q-1}$$

По условию $\frac{S_{1-4}}{4} = 30$ и $\frac{S_{3-6}}{4} = 120 \Rightarrow$

$\frac{S_{3-6}}{S_{1-4}} = \frac{120}{30} = 4 = \frac{a(q^6-1)-a(q^2-1)}{a(q^4-1)}$; $a \neq 0$, т.к. иначе были члены были бы все нули $\Rightarrow$ сред. арифмет. не было бы 30 или 120 $\Rightarrow$

$$\frac{q^6-1-q^2+1}{q^4-1} = 4; \quad \frac{q^2(q^4-1)}{(q^4-1)} = 4$$

$q \neq 1 \Rightarrow q^4-1 \neq 0$, т.к. если бы $q=1$, то все члены были бы одинаковые $\Rightarrow$ средние значения были бы одинаковы, что не так. $\Rightarrow$

$q^2 = 4 \Rightarrow$ $\frac{S_{1-4}}{4} = 30 \Rightarrow S_{1-4} = 120$

1) $q = 2$, тогда $\frac{a\cdot(2^4-1)}{2-1} = 120 \Rightarrow a = \frac{120}{15} = 8 \Rightarrow a_4 = aq^3 = 64$

2) $q = -2$, тогда $\frac{a((-2)^4-1)}{-2-1} = 120 \Rightarrow a = \frac{120\cdot(-3)}{15} = -24 \Rightarrow a_4 = aq^3 =$
$= -24\cdot(-2)^3 = 192$

Ответ: четвертый член может быть равен 64 или 192.

№2 $\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)$

Переведём от градусов к радианам в правом синусе

$$\sin(2x^\circ) = \sin\left(2x \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{90}\right)$$

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{90}\right) \Rightarrow \sin(\pi x) - \sin\left(\frac{\pi x}{90}\right) = 0$$

$$2\sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{90}}{2}\cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{90}}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x - \frac{\pi x}{90}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \frac{\pi x}{90}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{89x}{90} = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{91x}{90} = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{180k}{89}, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{90 + 180n}{91}, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

~~Разница~~ Расстояние между соседними корнями первого вида составляет $\frac{180}{89}$ $\left(\frac{180(k+1)}{89} - \frac{180k}{89} = \frac{180}{89}\right)$, расстояние между корнями второго вида составляет $\frac{180}{91}$ $\left(\frac{90+180(n+1)}{91} - \frac{90+180n}{91} = \frac{180}{91}\right)$.

Найдём расстояние между корнем 1-ого вида и 2-ого вида

$d = \left|\frac{90+180n}{91} - \frac{180k}{89}\right|$, $n, k \in \mathbb{Z}$; Надо минимизировать d.

$$d = \left|\frac{90 \cdot 89 + 180(89n - 91k)}{91 \cdot 89}\right| = \left|\frac{90(89 + 2(89n - 91k))}{91 \cdot 89}\right| \Rightarrow$$

$a = |89 + 2(89n - 91k)|$ - чем меньше a по модулю, тем меньше d.

Пусть $n - k = r \Rightarrow a = |89 + 2 \cdot 89 \cdot r - 2 \cdot 2k| = a = |89 + 2 \cdot 89r - 4k|$, $\Rightarrow$

~~если r>0, то a уменьшается~~ $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow r \in \mathbb{Z} \Rightarrow |a| \in \mathbb{Z}$, то есть т.к. $2 \cdot 89r$ - ~~чётное~~ и $4 \cdot k$ - чётное, но 89 - нечётное $\Rightarrow$

$89 + 2 \cdot 89r - 4k$ - нечётное число $\Rightarrow$ если $|a|$ - нечётное, то его минимум равен 1 Например при $n = k = 22$

~~так~~ $a = |89 + 2 \cdot 89 \cdot 0 - 4 \cdot 22| = |89 - 88| = 1 \Rightarrow d = \left|\frac{90 \cdot 1}{91 \cdot 89}\right| = \frac{90}{91 \cdot 89}$

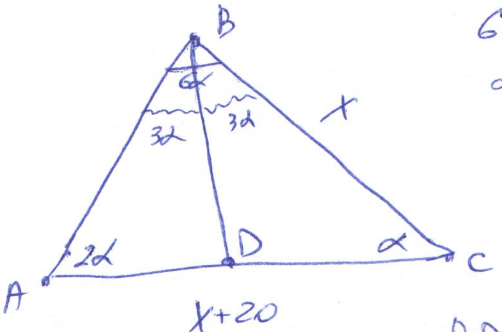
$\frac{180}{89} > 1$ и $\frac{180}{91} > 1$, а $\frac{90}{91 \cdot 89} < 1 \Rightarrow$ это наим. расстояние

Ответ: расстояние между ближайшими составляет $\frac{90}{91 \cdot 89} = \frac{90}{8099}$

№3. Пусть наибольшая сторона равна $x+20$, вторая по величине сторона равна x. Имеются 2 угла: 2α и α. Есть 2 варианта значений третьего угла: 6α или 3α, в любом случае этот угол больше других $\Rightarrow$ против него лежит сторона $x+20$, а против 2α лежит сторона x, т.к. против большего угла лежит большая сторона.

Пусть есть $\triangle ABC$; BD - искомая биссектриса, $\angle ABD = \angle DBC$

1) этот угол равен 6α



$\angle ABD + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$

$6\alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ$

$\alpha = \dfrac{180^\circ}{9} = 20^\circ \Rightarrow \angle ABC = 120^\circ$; $\angle BDC = \angle ABD + \angle BAD = 5\alpha = 100^\circ$

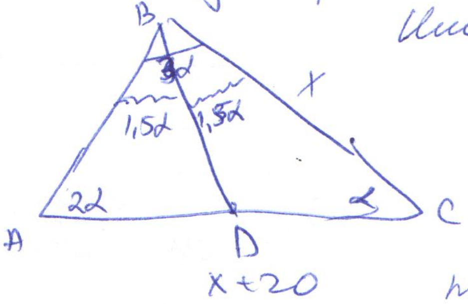
$\angle BAC = 40^\circ$

$\angle BCA = 20^\circ$

по т. синусов $\dfrac{BD}{\sin\angle BCA} = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC} \Rightarrow$

$$BD = \frac{x\cdot\sin\alpha}{\sin 5\alpha} = \frac{x\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{x\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{x\,2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 2x\sin 10^\circ$$

2) этот угол равен 3α



Имеем аналогичное решение:

$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$

$3\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$

$\alpha = \dfrac{180^\circ}{6} = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$; $\angle BDC = \angle ABD + \angle BAD = 3{,}5\alpha = 105^\circ$

$\angle BCA = 30^\circ$

$\angle BAC = 60^\circ$

по т. синусов $\dfrac{BD}{\sin\angle BCA} = \dfrac{BC}{\sin\angle BDC} \Rightarrow BD = \dfrac{x\sin\alpha}{\sin 3{,}5\alpha} = \dfrac{x\cdot\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} =$

$$= \frac{x\cdot\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{x}{2\sin 75^\circ}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$BD = \frac{x\cdot 4}{2\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2x}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{x\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{x(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$$

Ответ: биссектриса может быть равна $\dfrac{x\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = 2x\sin 10^\circ$ или $\dfrac{x\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = \dfrac{x(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$, при условии, что вторая по величине сторона равна x.

№1) $a \in [-6; 5]$, $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Заметим, что

$x = -1$ корень уравнения $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 & x+1 \\ \underline{3x^3 + 3x^2} & 3x^2 + (3a+1)x - a + 2 \\ \quad (3a+1)x^2 + (2a+3)x - a + 2 & \\ \quad \underline{(3a+1)x^2 + (3a+1)x} & \\ \qquad (-a+2)x - a + 2 & \\ \qquad \underline{(-a+2)x - a + 2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Имеем

$$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = (x+1)(3x^2 + (3a+1)x - a + 2) = 0$$

$3x^2 + (3a+1)x - a + 2 = 0$

$D = 9a^2 + 6a + 1 + 12a - 24 = 9a^2 + 18a - 23 = 9(a+1)^2 - 32$

$x_1 = \dfrac{-3a+1 + \sqrt{9(a+1)^2 - 32}}{6}$ $\quad x_2 = \dfrac{-3a-1 - \sqrt{9(a+1)^2 - 32}}{6}$

Построим таблицу значений x_1 и x_2 при различных a, учтём, что есть также корень $x = -1$

a	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_1	$\frac{17+\sqrt{193}}{6}$	$\frac{14+\sqrt{112}}{6}$	$\frac{11+7}{6} = 3$	$\frac{8+2}{6} = \frac{5}{3}$	$D<0$	$D<0$	$D<0$	$\frac{-4+2}{6} = -\frac{1}{3}$	$\frac{-7+7}{6} = 0$	$\frac{-10+\sqrt{112}}{6}$	$\frac{-13+\sqrt{193}}{6}$	$\frac{-16+2\sqrt{73}}{6}$
x_2	$\frac{17-\sqrt{193}}{6}$	$\frac{14-\sqrt{112}}{6}$	$\frac{11-7}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{8-2}{6} = 1$	$D<0$	$D<0$	$D<0$	$\frac{-4-2}{6} = -1$	$\frac{-7-7}{6} = -\frac{7}{3}$	$\frac{-10-\sqrt{112}}{6}$	$\frac{-13-\sqrt{193}}{6}$	$\frac{-16-2\sqrt{73}}{6}$
	1 целый	1 целый	удовлет. усл. 3 разл. корня, 2 целых ✓	удовлет. усл. 3 разл. корня 2 целых ✓	1 корень	1 корень	1 корень	~~удовлет. усл. 3 разл. корня 2 целых~~ 2 корня	удовлет. усл. 3 разл. корня 2 целых ✓	1 целый	1 целый	1 целый

Имеем 3 случая, когда есть 3 разл. корня и 2 из них яв-ся целыми, $a = -4; -3; 2$. Всего возможных 12 значений $a \Rightarrow$ вероятность получить -4 или -3 или 2 составляет $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Ответ: искомая вероятность равна $0{,}25$

№5. Из условия следует, что слово будет иметь вид $\underbrace{A\underbrace{\ldots\ldots}_{19\ \text{букв}}A}_{21\ \text{буква}}$, т.к. A ~~не~~ может быть после A, то слово принимает вид $\underbrace{AB\underbrace{\ldots\ldots}_{17\ \text{букв}}BA}_{21\ \text{буква}}$

Рассмотрим переход из одной буквы с номером i в букву $i+1$, есть 3 варианта: 1) если на месте i стоит A, то можно пойти только в букву B для $i+1$.

2) если на месте i стоит B, то можно пойти в букву A или в BB для $i+1$. BB означает, что на месте текущем стоит B и на предыдущем тоже на месте $(i-1)$ стоит B.

3) если BB, то можно пойти только в A, т.к. по условию подряд не более 2-х B, то есть BB. Тогда имеем переход:

	i	$i+1$
A	a	b+c
B	b	a
BB	c	b

a, b, c – кол-во вариантов, в которых на месте i стоит буква, находящаяся в соотв. строке.

Составим таблицу, в клетках кол-во вариантов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49
B	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
BB	0	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28

	19	20
A	65	86
B	49	65
BB	37	49

Как было доказано ранее на 20-ом месте стоит B ⇒ надо посмотреть кол-во вариантов, которые на 20-ом месте имели бы B или BB ⇒ кол-во вариантов $65+49=114$

Ответ: в словаре планеты 114 21-буквенных слов.

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученика 11 класса
МБ НОУ „Лицей №84 им. В.А. Власова"
Кемеровской обл., г. Новокузнецка
Утопленикова Дмитрия Александровича

апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы 80 за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что выполнил работу на большее кол-во баллов. Так как я не могу узнать разбалловку по задачам, поэтому напишу про все задачи. В задачах 1,2 и 4,5 я дошёл до правильного ответа, обосновав весь ход решения, поэтому в этих задачах не должно быть причин для снятия баллов. В задаче 3 про треугольник много было упущено вычисление сторон треугольника, но я нашёл углы треугольника и рассмотрел 2 возможных случая, выразив искомую величину через теорему синусов и значение упущенной стороны. Я считаю, что выполнил первую и третью ~~третьо~~ задания, упустив вторую, где надо было по той же теореме синусов найти сторону. Поэтому прошу пересмотреть баллы выставленные и за 3 задачу, так как считаю, что выполнил её примерно наполовину. Я предполагал, что она будет оценена в 10 баллов, а остальные по 20, и в сумме будет 90 баллов. Так как не знаю разбалловки, то подаю апелляцию.

Дата 30.05.2020.

Утопленников. Д.А.