МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Петров Илья Родионович**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

чистовик.

вариант 1.

задача 1.

Пусть b – первый член прогрессии, а q – знаменатель.

$$\begin{cases} \dfrac{b+bq+bq^2+bq^4}{4} = 15 \\ \dfrac{bq^2+bq^3+bq^4+bq^5}{4} = 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} b(1+q+q^2+q^3) = 60 \\ bq^2(1+q+q^2+q^3) = 240 \end{cases}$$

Тогда $4b(1+q)(q^2+1) = bq^2(q+1)(q^2+1) = 240$

$b \neq 0$, т.к. иначе ~~сум~~ ср. ар. суммы первых четырёх ~~4-х~~ членов будет 0, а не 15.

$q \neq -1$, т.к. тогда $\dfrac{b+bq+bq^2+bq^3}{4} = \dfrac{b-b+b-b}{4} = 0 \neq 15$

~~Тогда~~ $(q^2+1) > 0$ при любых q.

Тогда $4 = q^2 \Rightarrow q = \pm 2$.

Для каждого из найденных q приведём пример:

$q = 2,\ b = 4$: $\dfrac{4+4\cdot 2+4\cdot 2^2+4\cdot 2^3}{4} = 15$; $\dfrac{4\cdot 2^2+4\cdot 2^3+4\cdot 2^4+4\cdot 2^5}{4} = 60$ $\Rightarrow q = 2$ подходит

$q = -2,\ b = -12$: $\dfrac{-12+12\cdot 2-12\cdot 2^2+12\cdot 2^3}{4} = 60$; $\dfrac{-12\cdot 2^2+12\cdot 2^3-12\cdot 2^4+12\cdot 2^5}{4} = 240$ $\Rightarrow q = -2$ подходит

~~Ответ: $q = \pm$~~ (Эти примеры единственные, т.к. при изменении b в n раз, ~~то~~ вся левая часть меняется в n раз, то есть при $q = 2, b \neq 4$ и $q = -2, b \neq -12$ ~~как~~ усл-е не выполняется.

чистовик

задача 1 (продолжение).

Тогда последний член равен либо $4\cdot 2^5=128$, либо $(-12)\cdot(-2)^5=12\cdot 2^5=128\cdot 3=384$.

Ответ: 128 или 384.

Задача 2.

$\sin(\pi x)=\sin(3x^\circ)$

$$\left[\begin{array}{l}\pi x+3x^\circ=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \pi x-3x^\circ=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\pi x+\frac{3\cdot 2\pi x}{360}=\pi+2\pi k\\ \pi x-\frac{3\cdot 2\pi x}{360}=2\pi n\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{x}{60}=2k+1\\ x-\frac{x}{60}=2n\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{61}{60}x=2k+1\\ \frac{59}{60}x=2n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{60}{61}(2k+1)\ (1)\\ x=\frac{60}{59}(2n)\ (2)\end{array}\right.$$

Заметим, что ~~разница~~ минимальное расстояние между корнями (1) равно $\frac{120}{61}$, а между корнями (2) $\frac{120}{59}$.

Найдём мин. расст. между корнем (1) и корнем (2)

$$\left|\frac{60}{61}(2k+1)-\frac{60}{59}(2n)\right| \cancel{= 60\cdot\left|\frac{59(2k+1)-60(2n)}{}\right|}$$

$$=60\cdot\left|\frac{59(2k+1)-61(2n)}{61\cdot 59}\right| \cancel{\to\min} = \frac{60}{61\cdot 59}\left|59(2k+1)-61(2n)\right|$$

То есть нам нужно минимизировать $|59(2k+1)-61(2n)|$. Заметим, что это число натуральное, значит, расстояние ~~хо~~ -тя бы 1. При $n=k=15$ $|59\cdot 31-61\cdot 30|=1$, то

задача 2 (продолжение)

есть, минимальное зн-е 1 достигается. Тогда мин. расст. между корнями

$\frac{60}{61\cdot 59} \cdot \left| \frac{59(2k+1) - 61(2n)}{} \right|$ равно $\frac{60}{61\cdot 59}$

$\frac{60}{61\cdot 59} < \frac{120}{61}$ и $\frac{60}{61\cdot 59} < \frac{120}{59} \Rightarrow \frac{60}{61\cdot 59}$ – мин. расст. между корнями $\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$.

Ответ: $\frac{60}{61\cdot 59}$.

~~ж~~задача 5.

Заметим, что любое слово начинается на АБ.

Сделаем таблицу, куда будем записывать кол-во слов длины $(2+i)$ оканч. на АБ, БА и ББ (на АА оканч. не может по усл-ю).

конец слова \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
~~АБ~~ БА	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
АБ	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28
ББ	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21

49	65	86
37	49	65
28	37	49
16	17	18

Заметим, что из АБ мы можем получить либо АББ, либо АБА, то есть ставим 1 в поля ББ и БА в столбце $i = 1$. Далее таблица заполняется следующим образом: если слово оканч-

задача 5 (продолжение)

валось на БА, то ~~вы~~ из него можно получить слово оканч. на АБ длины на 1 больше. Если на АБ – то либо БА, либо ББ; если ББ – то БА. Таким образом таблица заполняется по след. алгоритму:

БА	x	$y+z$
АБ	y	x
ББ	z	y
	i	$i+1$

Нас интересует зн-е в клетке БА в 18-ом столбце, т.к. нам нужны слова длина $2+18=20$, оканч. на А. Это зн-е – 86. Значит, есть всего 86 слов длины 20.

Ответ: 86.

Задача 4.

$$3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=0$$

$$3x^2+(4-3a)x^2+(3-2a)x+a+2=0$$

Заметим, что $x=-1$ – корень. Тогда

$$(x+1)(3x^2+(1-3a)x+a+2)=0.$$

Нам нужно, чтобы $3x^2+(1-3a)x+a+2$ имело 2 отличных от (-1) корня, причем один из корней должен быть целым.

$$3x^2+(1-3a)x+a+2=0$$

Задача 4 (продолжение).

$D = (1-3a)^2 - 4\cdot 3(a+2) = 1 - 6a + 9a^2 - 12a - 24 =$

$= 9a^2 - 18a - 23 = 9a^2 - 18a + 9 - 32 =$

$= 9(a-1)^2 - 32$. Это число должно быть квадратом нат. числа, т.к. иначе среди корней $x = \frac{3a-1\pm\sqrt{D}}{6}$ не будет целых.

* По условию, $a \in [-5; 6] \Rightarrow |a-1| \le 6$

Заметим, что квадрат нат. числа может давать остатки 0, 1, 4, 9, 6, 5 при делении на 10.

Если $|a-1| = 0$, то $9(a-1)^2 - 32 < 0$ – не подходит;

$|a-1| = 1 \Rightarrow 9(a-1)^2 - 32 < 0$ – не подх;

$|a-1| = 2 \Rightarrow 9(a-1)^2 - 32 = 4$ – подходит;

$|a-1| = 3 \Rightarrow 81 - 32 = 49$ – подходит;

$|a-1| = 4 \Rightarrow 9\cdot 16 - 32 \underset{10}{\equiv} 2$ – не подходит;

$|a-1| = 5 \Rightarrow 9\cdot 25 - 32 \underset{10}{\equiv} 3$ – не подходит;

$|a-1| = 6 \Rightarrow 9\cdot 36 - 32 \underset{10}{\equiv} 2$ – не подходит.

Значит, $|a-1|$ равен либо 2, либо 3, то есть $a \in \{-2; -1; 3; 4\}$

Если $a = -2$, то $\sqrt{D} = 7 \Rightarrow x = \frac{-6-1+7}{6} = 0$ или $x = \frac{-6-1-7}{6} = -\frac{14}{2} \Rightarrow$ ~~нет~~ есть целые корни $\Rightarrow a = -2$ подходит;

если $a = -1$, то $\sqrt{D} = 2 \Rightarrow x = \frac{-3-1+2}{6} = -\frac{1}{3}$ или $x = \frac{-3-1-2}{6} = -1 \Rightarrow$ есть целые корни, но совпадает с $-1 \Rightarrow$ не подходит;

Задача 3 (продолжение)

4 ~~раз~~ случая:

~~1) $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$~~

~~2) $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, $\angle A = 20^\circ$;~~

~~3) $\angle B = 54^\circ$, $\angle C = 108^\circ$, $\angle A = 18^\circ$~~

~~4) $\angle B = \frac{1080^\circ}{11}$, $\angle C = \frac{1080^\circ}{11}$, $\angle A = \frac{360^\circ}{11}$~~

Третий же угол в 3 раза больше одного из двух других. Тогда есть 2 наборa углов: $(\beta; 2\beta; 3\beta)$ и $(\beta; 2\beta; 6\beta)$. Поскольку сумма углов в треугольнике равна 180°, а против большей стороны лежит больший угол, то есть два случая:

1) $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 60^\circ$; $\angle C = 90^\circ$

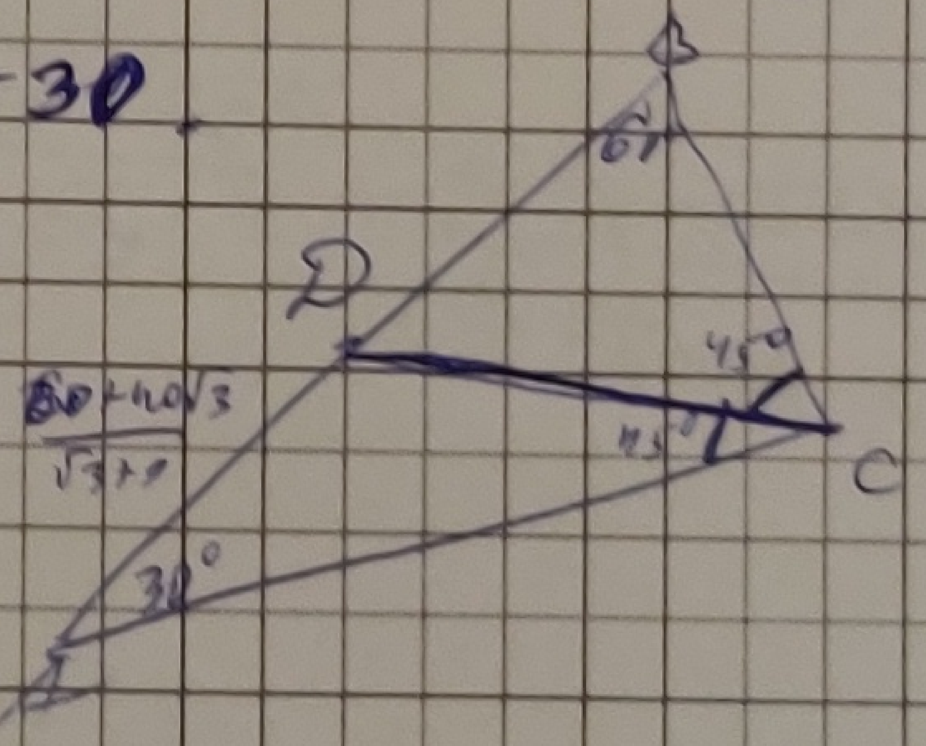
2) $\angle A = 20^\circ$; $\angle B = 40^\circ$; $\angle C = 120^\circ$

1 случ. по т. синусов $\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow x + 10 = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 20 = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}x + 10\sqrt{3} = 2x \Rightarrow x(2 - \sqrt{3}) = 10\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 20\sqrt{3} + 30$.

Пусть CD – биссектриса



$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

$AD = \sqrt{3}\,BD$

$BD(\sqrt{3} + 1) = 20\sqrt{3} + 40$

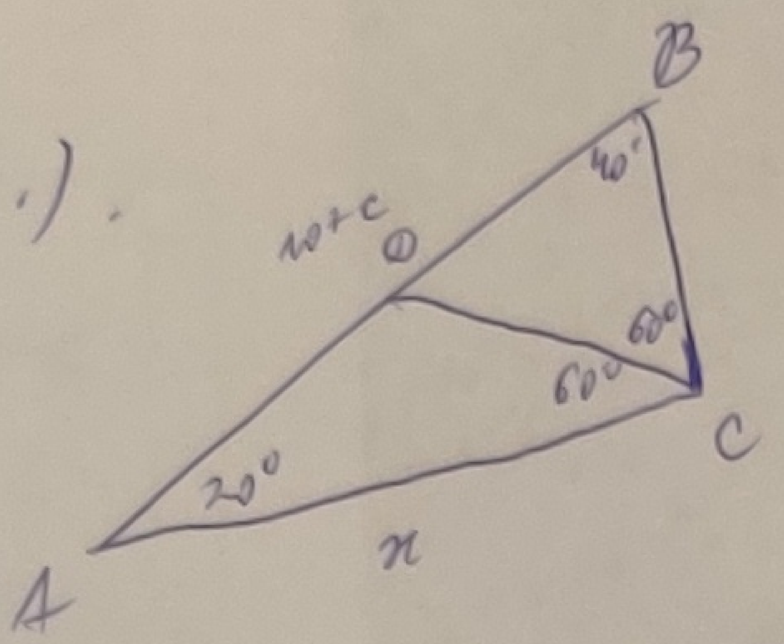
$BD = \frac{20\sqrt{3} + 40}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow AD = \frac{60 + 40\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$

по т. синусов $\frac{CD}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow CD = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{60 + 40\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Задача 3 (продолжение).

$$CD = \frac{60+40\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

2 спос.).



$$\frac{AC}{\sin 40^\circ} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2AB}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{2x+20}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}x = 2\sin 40^\circ \cdot x + 20\sin 40^\circ$$

$$x(\sqrt{3}-2\sin 40^\circ) = 20\sin 40^\circ$$

$$x = \frac{20\sin 40^\circ}{\sqrt{3}-2\sin 40^\circ} = AC$$

$$\frac{BC}{\sin 20^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}-2\sin 40^\circ} \Rightarrow BC = \frac{20\sin 20^\circ}{\sqrt{3}-2\sin 40^\circ}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = 2\cos 20^\circ \qquad AD = 2\cos 20^\circ \cdot BD$$

$$\frac{20\sin 40^\circ}{\sqrt{3}-2\sin 40^\circ} + 10 = (1+2\cos 20^\circ)BD$$

$$BD = \frac{10\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-2\sin 40^\circ)(1+2\cos 20^\circ)} \Rightarrow AD = \frac{20\sqrt{3}\cdot\cos 20^\circ}{(\sqrt{3}-2\sin 40^\circ)(1+2\cos 20^\circ)}$$

$$\frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{CD}{\sin 20^\circ} \Rightarrow CD = \frac{2AD\cdot\sin 20^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sqrt{3}}\cdot\frac{20\sqrt{3}\cdot\cos 20^\circ}{(\sqrt{3}-2\sin 40^\circ)(1+2\cos 20^\circ)} =$$

$$= \frac{20\sin 40^\circ}{(\sqrt{3}-2\sin 40^\circ)(1+2\cos 20^\circ)}$$

Ответ: $\frac{60+40\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ или $\frac{20\sin 40^\circ}{(\sqrt{3}-2\sin 40^\circ)(1+2\cos 20^\circ)}$.