МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зайцев Михаил Романович**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

$\boxed{\text{Черновик!}}$

№1 Пусть первый член прогрессии b, а её знаменатель q, тогда среднее арифметическое первых 4-х членов:

$$\frac{b+bq+bq^2+bq^3}{4}=15$$

последних $\frac{bq^2+bq^3+bq^4+bq^5}{4}=60$

$60=q^2\left(\frac{b+bq+bq^2+bq^3}{4}\right)=q^2\cdot 15$, значит $q^2=4$, то есть $q=\pm 2$

Если $q=2$ $\quad b\cdot\frac{1+2+4+8}{4}=15$, то есть $b=4$

Если $q=-2$ $\quad b\cdot\frac{1-2+4-8}{4}=15$, то есть $b=-12$

В первом случае последний член $4\cdot 2^5=128$,

во втором $-12\cdot(-2)^5=384$

Ответ: 128 или 384

№5 Пусть $f(n)$ - количество n-буквенных слов, тогда при $n\geq 8$:

Слово должно начинаться и заканчиваться на А, и вторая и предпоследняя буквы должны быть Б, т.к. А не может стоять рядом с А.

После букв АБ может идти Б, потом А или сразу А, у ... [illegible] ... ~~чистовик~~ чистовик

Аналогично перед БА либо А либо АБ,

то есть значение $f(n)$ равно сумме

значений $f(n-4) + 2f(n-5) + f(n-6)$, т.к.

количество расстановок букв в ситуации

$\ldots \underbrace{A \ldots A}_{l} \ldots$, ~~раз~~ края закончены равно

количеству расстановок букв в словах длины l, а

из n мы можем получить АБА, АБА или

АББА ... АБА, АБА ... АББА, АББА ... АББА

$f(2) = 1$, только АА, $f(3) = 1$, только АБА, $f(4) = 1$, только АББА

$f(5) = 1$ только АБАБА, $f(6) = 2$ только АБАББА, АББАБА,

тогда $f(7) = 2$, только АБАБАБА, АББАББА

тогда $f(8) = 4$, $f(9) = 4$, $f(10) = 6$, $f(11) = 7$, $f(12) = 10$

$f(13) = 14$, $f(14) = 18$, $f(15) = 23$, $f(16) = 30$, $f(20) = 94$

Ответ: 94 слова

№4 $3x^3 - (3a-4)x^2 - (a-3)x + a + 2 = 0$

$(x+1)(3x^2 - (3a-1)x + a + 2) = 0$

То есть у этого уравнения всегда есть

1 целый корень: -1, то есть, чтобы было

три различных корня необходимо и достаточно, чтобы

(многочлен)

У уравнения $3x^2-(3a-1)x+a+2$ было 2 различных корня, не равных -1.

$3+(3a-1)+a+2\ne 0 \Leftrightarrow a\ne -1$

Посчитаем дискриминант уравнения

$3x^2-(3a-1)x+a+2$

$D=(3a-1)^2-12(a+2)=9(a-1)^2-32$

Корни есть при $(a-1)^2\ge\frac{32}{9}$

При $a\le 1-\frac{4\sqrt2}{3}<0$ или $a\ge 1+\frac{4\sqrt2}{3}>\frac{4\cdot 1{,}4}{3}+1\ge 2$

Проверим для $a=-5,-4,-3,-2$ и $a=3,4,5,6$

$9(a-1)^2-32$. При $a=-5$: $9\cdot 6^2-32=4(81-8)=4\cdot 73$, не полный квадрат

При $a=-4$: 193 не полный квадрат

При $a=-3$: $4^2\cdot 7$ не полный квадрат

При $a=-2$: $81-32$, $D=49$ корни 0 и $-\frac{7}{3}$ подходит

При $a=-1$ не подходит

При $a=3$ $D=4$ корни $1;\ \frac{5}{3}$ подходит

При $a=4$ $81-32$ $D=49$, корни $3;\ \frac{2}{3}$, подходит

При $a=5$ $4^2\cdot 7$ не полный квадрат

При $a=6$ 193 не полный квадрат.

По сути подходят 3 из 12 случаев

Ответ: с вероятностью $\frac{1}{4}=0{,}25$

$\boxed{\text{числовых}}$

№2 $\quad 3x^{\circ} = \frac{3x\cdot\pi}{180} = \frac{\pi x}{60}$ радиан

То есть уравнение эквивалентно

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi x}{60} + 2\pi k \\ \pi x = \pi - \frac{\pi x}{60} + 2\pi k \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{120}{59}\cdot k \\ x = \frac{60}{61}(2k+1) \end{array}\right.$$

Расстояние между корнями из одной серии

$x_1 - x_2 = \left|\frac{120}{61}(n-k)\right|$

$x_1 - x_2 = \left|\frac{120}{59}(n-k)\right|$

Из разных серий

$|x_1 - x_2| = \left|60\left(\frac{2n+1}{61} - \frac{2k}{59}\right)\right| = \frac{60}{59\cdot 61}\left(59(2n+1) - 61\cdot 2k\right) = \frac{60}{61}\cdot\frac{2}{59\cdot 61}(59n - 61k)$

$|59n - 61k| \geq$ НОД$(59, 61) =$ НОД$(2, 59) =$ НОД$(2, 1) = 1$

и это значение достигается при каких-то n и k

значит $|x_1 - x_2| \geq \frac{120}{59\cdot 61}$ или $|x_1 - x_2| \geq \frac{120}{59}$ или $~~|x_1 - x_2| \geq \frac{120}{61}~~$ $\frac{120}{59\cdot 61}$

~~Наименьшая из разностей~~

~~Ответ: $\frac{120}{3599}$~~

Значит все ~~возможные~~ значения имеют вид $\left|\frac{60}{61} - \frac{120}{59\cdot 61}\cdot k\right| = \frac{60}{61}\left|1 - \frac{2k}{59}\right| \geq \frac{60}{61}\left|1 - \frac{58}{59}\right| =$

$= \frac{60}{61\cdot 59} \leq \frac{120}{59}$ и $\frac{120}{61}$, что достигается при $k = 29$

(меньше $\frac{1}{59}$ значения быть не может, т.к. $\left|\frac{59-2k}{59}\right| \geq \frac{1}{59}$, т.к. 59 нечётно, а $2k$ чётно.

Ответ: $\frac{60}{61\cdot 59} = \frac{60}{3599}$

Шитовик

углы α, β, γ

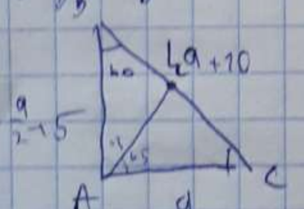
№3 Пусть стороны a, b, c и $a > b > c$

т.к. против наибольшей стороны лежит наибольший угол, а против наименьшей наименьший возможны такие ситуации т.к. α наибольший он не может быть меньше остальных, ~~значит либо~~ $\alpha = \cancel{\beta}, \gamma$ и γ наименьший поэтому он не может быть третьим углом

~~значит либо $\alpha = 2\gamma$~~ При этом если $\alpha = 2\beta$, то $\beta = 3\gamma$, что невозможно, т.к. $\alpha > \beta$, значит β тоже не может быть 3 углом, значит 3 угл α и $\alpha = 3\gamma$, $\beta = 2\gamma$ или $\alpha = 3\beta$, $\beta = 2\gamma$

I) По сумме углов Δ: $\alpha + \beta + \gamma = 180 \Leftrightarrow \gamma = 30, \alpha = 90, \beta = 60$

Треугольник прямоугольный



$\frac{a}{a+10} = \sin 60 = \frac{\sqrt3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{10\sqrt3}{2-\sqrt3}$

Пусть L - основание биссектрисы, тогда $\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|BA|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt3}$ значит, если $a+10 = 2x$, $a = \sqrt3 x$, $|AB| = |x|$

$$l = \sqrt{|AC|\cdot|AB| - |BL|\cdot|LC|} = \sqrt{x^2\sqrt3 - \frac{2x\cdot\sqrt3}{1+\sqrt3}\cdot\frac{2x}{1+\sqrt3}} = x\sqrt{\frac{6}{(1+\sqrt3)^2}} =$$

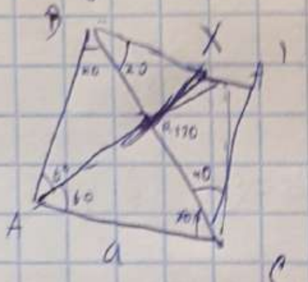
$$\cancel{= x\sqrt{3(2-\sqrt3)} = (a+10)\sqrt{3(2-\sqrt3)} = \frac{20}{\ldots}\sqrt{3\ldots}}$$

Чистовик

$$l = \frac{(a+10)}{2}\left(\frac{\sqrt6}{2+\sqrt3}\right) = \frac{20\sqrt6}{2(2-\sqrt3)(1+\sqrt3)} = \frac{10\sqrt6}{\sqrt3-1}$$

II) $\alpha = 3\beta$, $\beta = 2\gamma$, по сумме углов Δ

$6\gamma + 2\gamma + \gamma = 180$, $\gamma = 20$, $\beta = 40$, $\alpha = 120$



~~Достроим до параллелограмма с углом 120 ... перевернутый ...~~

По формуле биссектрисы $l = \frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{ac}{a+c}$

По т. синусов $\frac{a}{\sin 40} = \frac{a+10}{\sin 120} \Leftrightarrow a = \frac{10\sin 40}{\frac{\sqrt3}{2} - \sin 40}$

$$\frac{a}{\sin 40} = \frac{|AB|}{\sin 20} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sin 20\cos 20} = \frac{|AB|}{\sin 20} \Leftrightarrow |AB| = \frac{a}{2\cos 20}$$

$$l = \frac{a\cdot\frac{a}{2\cos 20}}{a+\frac{a}{2\cos 20}} = a\cdot\frac{1}{2\cos 20+1} = \frac{10\sin 40}{\frac{\sqrt3}{2}-\sin 40}\cdot\frac{1}{2\cos 20+1} =$$

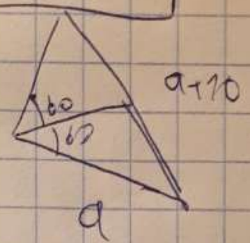
$$= \frac{10}{\left(\frac{\sqrt3}{2\sin 40}-1\right)(2\cos 20+1)} = \frac{10\cos 20}{\frac{\sqrt3}{2} - 2\cos^3 20 - \cos 20 + \frac{\sqrt3}{4\sin 20}}$$

Ответ: $\frac{10\cos 20}{\left(\frac{\sqrt3}{4\sin 20} - \cos 20\right)(2\cos 20+1)}$ или $\frac{10\sqrt6}{\sqrt3-1}$

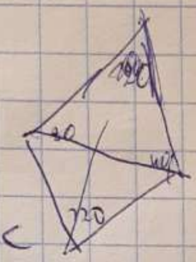
Дальше

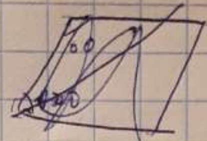
черновики

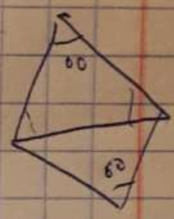
Черновик

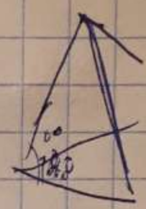


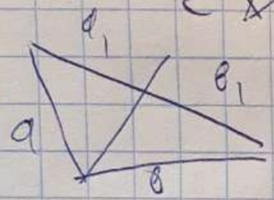
$$\frac{10\sqrt{6}}{2-3+\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

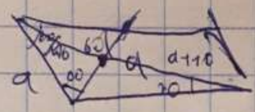












$2a\cos20$

$$\frac{a+10}{a}$$

$\sqrt{ab-a_1b_1}$ $\frac{a_1}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin\gamma}$

$\frac{a}{\sin20} = \frac{b}{\sin40}$ $\frac{a}{a+10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a_1 $\frac{b_1}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin\gamma}$

$\frac{a}{\sin20} = \frac{a+10}{\sin80}$

$2\sin20\cos20$

$\frac{a\sqrt{3}}{2} + 10a$

$a_1 = \frac{a\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma} =$

$a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sin20 + 10\sin80$ $b = 2a\cos2a$

$a\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}$

$a = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + 10 =$

$a = \frac{10\sin20}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin20}$

$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$

$\frac{20}{2-\sqrt{3}}$

$$\frac{2\sqrt{2a^2\cos20}}{a+2a\cos20} = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$\frac{10}{2-\sqrt{3}}$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos2\alpha+1}{2}$

b_1 $\frac{c\cdot(ab)}{(a+b)}$ + $c(a+b$

$a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos\gamma$

ab $\frac{c^2ab}{(a+b)^2}$ $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ $\sqrt{(a+b)^2 - c^2}$ $2ab\cos\gamma+ab$

Черновик

$9 \cdot 6^2 - 32 =$ $4(7 \cdot 9 - 3) =$

$9 \cdot 5^2 - 32 =$

$\sin(\ldots) = \sin(9x^\circ)$

$25 \cdot 9 - 32$

$225 - 32 = 193$

$3x^\circ = \frac{1}{120}x \cdot \pi$

$9 \cdot 4^2 - 32 =$

$36 - 32 = 4$

$77x = \pi - \frac{77}{40}$

$7x = \frac{77}{40}$

$\frac{-7 \pm 2}{6}$

$\frac{-7 \pm 2}{6} = 0$ $\frac{-14}{6} = -\frac{7}{3}$

36

$\frac{8 \pm 2}{6} = 7, 3\,6\,\frac{5}{3}$

$\frac{17 \pm 4}{6} = 3, \frac{2}{3}$

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$x\left(7 + \frac{2}{40}\right) = 2k$

$x\left(7 - \frac{2}{40}\right) = 2k$

черновик

$b, bq, bq^2, bq^3, bq^4, bq^5$

$$\frac{b+bq+bq^2+bq^3}{4} = 15$$

$$\frac{bq^2+bq^3+bq^4+bq^5}{4} = 60$$

$$q^2\left(\frac{b+bq+bq^2+bq^3}{4}\right) = 60$$

$q^2 = 4$

$q = \pm 2$

$$b\,\frac{1+2+4+8}{4} = \frac{60}{15} = 4$$

$b = 4$, $q = 2$ | $q = -2$, $b = -12$

$$b = \frac{15 \cdot 4}{1-2+4-8} = -12$$

$bq^5 = -12 \cdot (-2)^5 = 12 \cdot 32 = 384$

$4 \cdot 2^5 = 4 \cdot 32 = 128$

$9a^2 - 6a + 1 - 12a - 24$

$9a^2 - 18a - 23$

$3 + (3a-1) + a + 2 \neq 0$

$(3a-3)^2 = 4a \cdot 4 \neq 0$

$a = -1$

$(a-1)^2 >$

$a - 1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$a - 1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$a = 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$3x^3 - (3a-4)x^2 + (a+2)x$

$-(2a-3)x + a + 2$

$f(12) + 2f(11) + f(10)$

$+ 19 + 6$

10

16 + 14 = 30

36 + 8 = 44

16 + 18

$-5, -4, -3, -2$

$3, 4, 5, 6$

$f(16) + 2f(15) + f(14)$

$30 + 46 + 18$

$4, 5, 6$, $-5, -4, -3, -2$

$\sin \pi x = \sin(3x^\circ)$

$\pi x = \frac{3x^\circ}{180} \cdot \pi$

$\pi x = \pi - \frac{3x^\circ}{180} \cdot \pi$

$\rho(x_1, x_2) = \frac{60}{61}$?

$x = \frac{3x}{60}$ $\quad x = 0$

$x = 1 - \frac{x}{60}$ $\quad x = \frac{1}{1+\frac{1}{60}} = \frac{60}{61}$

23

$f(5) + 2f(4) + f(3)$

$f(6) + 2f(5) + f(4)$

$f(7) + 2f(6) + f(5)$

2 4 1

$f(8) + 2f(7) + f(6)$

$4 + 4 + 2$

$f(9) + 2f(8) + f(7)$

$4 + 3 + 2$

$f(11) + 2f(10) + f(9)$

7 12

$6 + 8 + 4$ 4

Черновик

$\sqrt{a b - a_1 b_1} = \sqrt{ab}\sqrt{1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}}$

2 бранчо

$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right) - 2\cos^2 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta$

$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$

$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$

$\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{2ab\cos\gamma + 2ab}$

$\frac{ab}{a+b}\sqrt{2\cos\gamma + 2}$

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = 15$

$\frac{a_2 + a_4 + a_5 + a_6}{5} = 60$

$\frac{a_5 + a_6 - a_1 + a_2}{5} = 45$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2\cos 2\theta - 1}$

$(a + 10)(\sin 40) = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\gamma = 2\cos 2\alpha - 1$

$4\cos\frac{\gamma}{2}$

$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40\right) = 10\sin 40$

$\frac{2ab}{a+b} 2\cos\frac{\gamma}{2}$

$a = \frac{10\sin 40}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 4}$

61
79
549
305
3599

259 - 32

225 - 32

203 - 10

193

$\frac{10}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin 40} - 1\right)(2\cos 20 + 1)} =$

$= \frac{10}{\frac{\sqrt{3}\cos 20}{\sin 40} - 2\cos 20 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2\sin 40}}$

$2\cos^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2\cos 20} - 2\cos 20 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 20 \sin 20}$

черновик

$3x^3+4x^2+3x+2 = 3ax^2-2ax+a$

$3x^3+4x^2+3x+2 \mid x+1$

$3x^3+3x^2 \quad | \quad 3x^2+x+2$

x^2+3x

x^2+x

$2x+2$

$(x+1)(3x^2+x+2) - a(3x^2+2x+1)$

$(x+1)(x+1) + (x+1-a)(3x^2+2x+1)=0$

$x+1-a = \dfrac{x^2+1}{3x^2+2x+1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}{3x^2+2x+1}$

$\dfrac{\frac{1}{3}(3x^2+2x+1) - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}}{3x^2+2x+1}$

$n+1$

А Б

А Б 2020

А, Б

1 - А

2 - 1

3 - 1

4 - 1

5 - 1

6 - 2

7 - 2

8 - 2

А|Б|А Б|Б|А

16

А Б А Б А

А Б ББ А Б А

1 2 3 4 5 6 7

А Б

А Б Б А

А Б Б А

16

f(12) + f(14)

f(12) + 2f(13) + f(14)

f(20) = f(12) + 2f(13) + f(14)

20	20
12	1+2+2=5
13	1+4+2=7
14	2+4+2=8
4	1
5	1
6	2

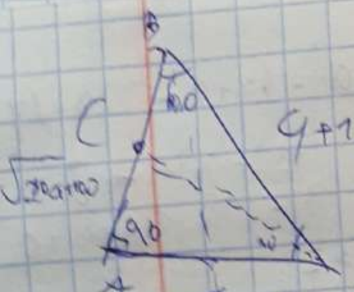
f(12) = А(12)

6	2
7	2
8	2
5	1
6	2
7	2

f(n) = f(n-8) + 2f(n-7) + f(n-6)

f(20) = 20

черновик



$a = b + 10$

$\angle A > \angle B > \angle C$

$\angle A = 2\angle B$

$\angle A = 2\angle C$

$\angle A = 2\angle B$

$\angle A = 2\angle C$

$\angle A = 2\angle C, \angle B = 3\angle C$

$6\angle C = 180$

$\angle C = 30$

$\angle B = 2\angle C$

$\angle A = 3\angle C$

$\angle B = 2\angle C$

$\angle A = 3\angle B$

$\angle A = 2\angle C$

$\angle A = 3\angle B$

$\angle B = 2\angle C \quad \angle A = 3\angle B$

$a \in [-5, 6]$

$3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$

$3x^3 - (2a-3)x^2 - (2a-3)x + (a-1)x \ldots = 0$

$a \in [-5, 6]$

$3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3a-4}{3}$

$x_1 x_2 x_3 = \frac{-(a+2)}{3}$

$3x^3 - (3a-6)x^2 - (2a-3)x + a + 2 + x(a+2)$

$\frac{-5 \pm 2}{3} = -\frac{2}{3}, -1$

$3x^2 + 10x + 3 = 0$

$a = -2$

$3x^3 + 10x^2 + 3x = 0$

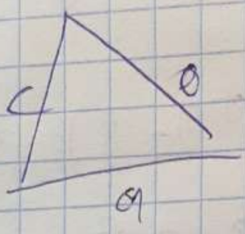
$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 & x+1 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + x + 2 \\ x^2 + x & \\ 2x + 2 & \end{array}$$

$3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 - 3ax^2 - 2ax + a$

$(x+1)(3x^2 + x + 2) - a(3x^2 + x + a) + ax$

$(3x^2 + x + 2)(x + 1 - a) + ax = 0$

Черновик



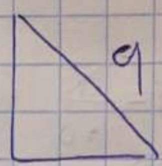
$\angle 1 = 2\angle 2$

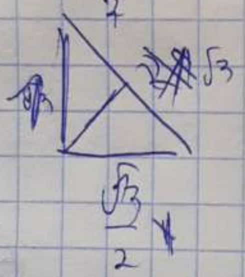
$\angle 3 = 3\angle 1$ или $3\angle 2$

$\alpha = 2\beta$

$\beta =$

$\alpha = 2\gamma$





$\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\underline{a+10}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}a + 5\sqrt{3}$

$\frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + 20 + 10\sqrt{3} = \frac{20}{2\sqrt{3}}$

$a\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = 5\sqrt{3}$

$a = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

$ab - a1b1$

$\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$

$\left(\frac{3}{2+\sqrt{3}}\right)$ $\frac{3(2-\sqrt{3})}{1}$

$\frac{4\sqrt{3}+6-4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{3}{2+\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$

$4\sqrt{3} + 6$