



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Яценко Роман Сергеевич**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_n\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$.
Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,57) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

① $b_1=1, b_{b_2}=10, b_n=? , n=b_{b_2}$

прогрессия возраст.

пусть d — разность данной
арифм. прогрессии $\{b_i\}$, тогда

$$b_{b_2} = b_{b_1+d} = b_{1+d} = b_1 + ((1+d)-1) \cdot d =$$

$$= 1 + d^2 \Rightarrow 1 + d^2 = 10 \Rightarrow d = \pm 3, \text{ но}$$

$d = -3$ не подходит, т.к. $\{b_i\}$ возраст.

тогда $b_3 = b_{1+2d} = 1+6=7$

$$b_{b_2} = b_7 = b_{1+6d} = 1+18=19$$

$$b_n = b_{b_{b_2}} = b_{19} = b_{1+18d} = 1+54=55$$

Ответ: 55.

$$5 = \frac{4\sqrt{x} + \sqrt{x(x-16)} + x}{2} - x \quad | \cdot 2$$

$$10 = 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x(x-16)} - x \quad (1)$$

$$\sqrt{x} (4 + \sqrt{x-16}) = 10 + x, \text{ возв. в}$$

квадрат:

$$x (16 + 8\sqrt{x-16} + x - 16) = 100 + 20x + x^2$$

$$8x\sqrt{x-16} + x^2 = 100 + 20x + x^2$$

$$8x\sqrt{x-16} = 100 + 20x, \text{ возв. в}$$

квадрат:

$$64x^2(x-16) = 10000 + 4000x + 400x^2$$

$$64x^3 - 1424x^2 - 4000x - 10000 = 0$$

из ур-я (1) можно заметить,

что $x = 25$ кор.

схема Горнера:

	64	-1424	-4000	-10000
25	64	176	400	0

$$(x-25)(64x^2+176x+400)=0 \quad |:16$$

$$(x-25)(4x^2+11x+25)=0$$

$$4x^2+11x+25=0$$

$D = 121 - 400 < 0 \Rightarrow$ не имеет
 корней $\Rightarrow x=25$ — единств. корень $\Rightarrow$

и старшая степень равна:

$$x-16 = 25-16 = 9$$

ответ: 9.

④ Пусть a, b, c — длины ребер,
 d — диагональ

не затрагивая общности,
пусть a и b — длины первых 2
ребер, при этом $a \geq b$, тогда
 c — третье ребро.
по условию:

$$\begin{cases} a+b=2020 & (1) \\ ab=c & (2) \\ d=1+c & (3) \end{cases}$$

подставим в (3) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$:

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 + c$, возведем в квадрат,
т.к. обе части положительны:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2c + c^2$$

$$a^2 + b^2 = 2c + 1 \quad (4)$$

подставим c из (2) в (4):

$$a^2 - 2ab + b^2 = 1$$

$$(a-b)^2 = 1$$

$$a - b = 1, \text{ м.н. } a > b$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b \\ 2b = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2019}{2} \\ a = \frac{2021}{2} \end{cases}$$

подставим найденные a и b в (2):

$$c = \frac{2019 \cdot 2021}{4}$$

знаем квадрат равно по (3):

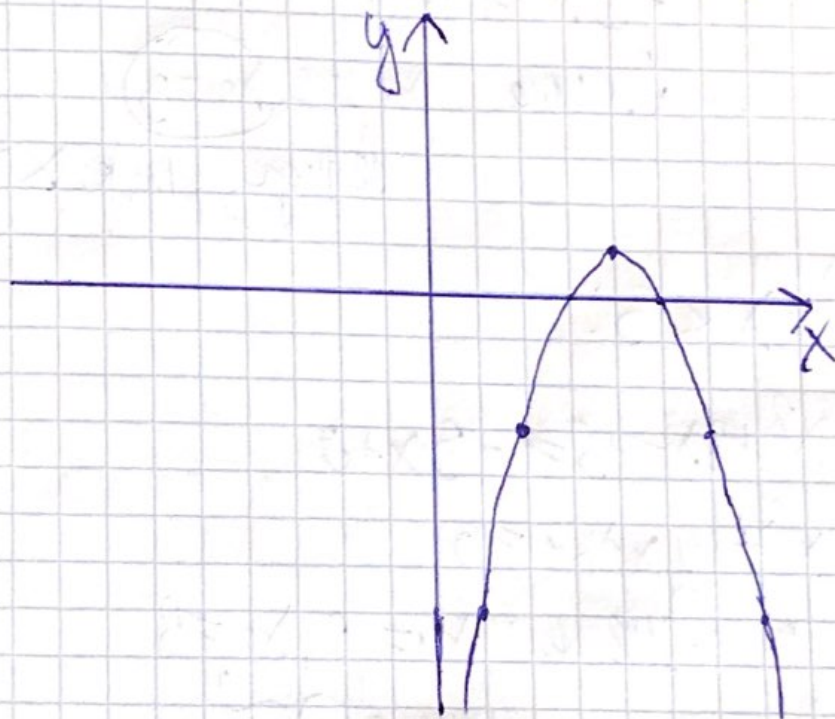
$$d = 1 + c = 1 + \frac{2019 \cdot 2021}{4} =$$

$$= 1 + \frac{4080399}{4} = 1020100,75$$

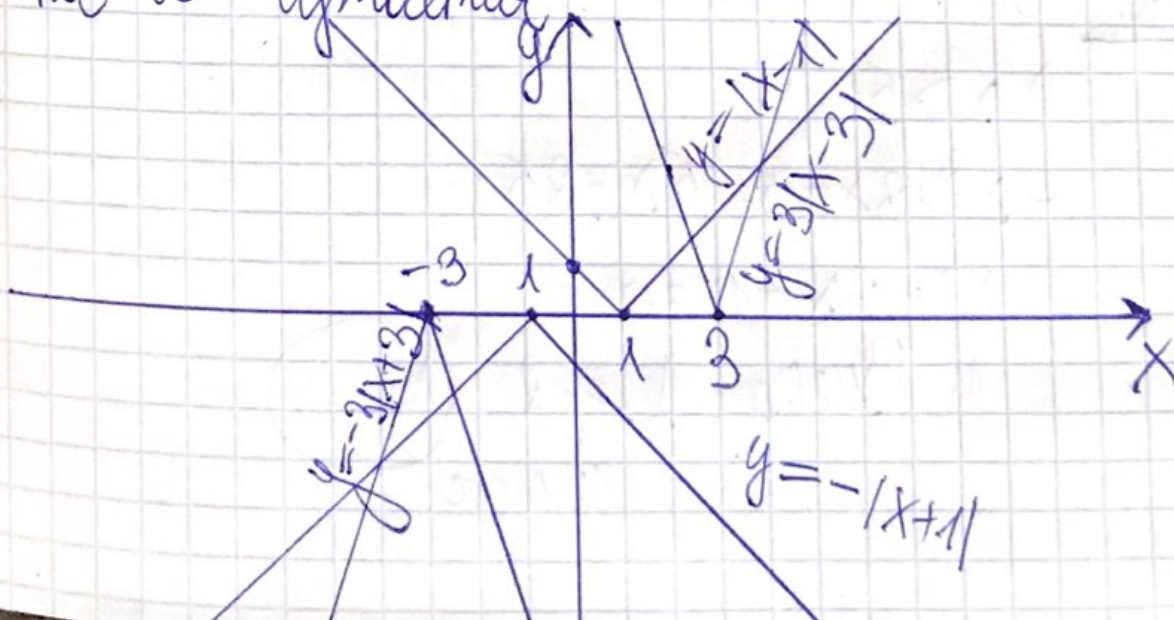
Ответ: 1020100,75.

$$\textcircled{3} \quad -x^2 + 8x - 15 = a|x - a|$$

$$-x^2 + 8x - 15 = -(x - 4)^2 + 1$$



$f(x) = |x - a|$ — „угодок“ при достижении на a суммается



$$a=3$$

$$1. -x^2 + 8x - 15 = 3|x-3|$$

$$1) x \geq 3:$$

$$-x^2 + 8x - 15 = 3x - 9$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$m. \text{ Булева: } x_1 = 2, x_2 = 3$$

не погр., м.к. $x \geq 3$

$$2) x < 3:$$

$$-x^2 + 8x - 15 = -3x + 9$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$m. \text{ Булева: } x_1 = 3, x_2 = 8$$

примеч: $x=3$ $\xrightarrow{\text{примеч}}$ не погр., м.к. $x \leq 3$

$$2. -x^2 + 8x - 15 = 5|x-5|$$

$$1) x \geq 5$$

$$-x^2 + 8x - 15 = 5x - 25$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$m. \text{ Булева: } x_1 = -2, x_2 = 5$$

не погр.

$$2) x < 5$$

$$-x^2 + 8x - 15 = -5x$$

$$x^2 - 13x + 40 = 0$$

м. Виета: $x_1 = 5, x_2 = 8$ — оба не пойд.

ответ: $x = 5 \Leftrightarrow$ 1 реш-е

3. Видно, что при $a \in (3; 5)$ „углубок“ лежит внутри параболы, значит пересекает 2 раза $\Leftrightarrow$ 2 реш-я

4. м.к. $a = 3, a = 5$ 1 реш-е,

то при $a \in (0; 3), (5; +\infty)$ нет реш-я
м.к. при $a = 3$ и $a = 5$ это и есть точки $x = 3$ и $x = 5$

5. $a = 0$:

$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$

м. Виета: $x_1 = 3, x_2 = 5$ — 2 реш-я.

6. $a \in (-\infty; 0)$

оба графика $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ и
 $\varphi(x) = a|x - a|$ убывают при $x \rightarrow +\infty$.

а, значит, очевидно, что они
только пересекутся, при этом только 2
раза.

Ответ: $a \in (0; 3) \cup (5; +\infty)$ — нет решений,
 $a = 3, a = 5$ — 1 решение;
 $a \in (3; 5)$ — 2 решения.

5

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - d\right) = \cos d \quad \begin{matrix} h = 16x \\ a = (x-16)16 \\ b = 16x \end{matrix}$$

$$\sin(x^2 - 2,57) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi(1-2x)}{2}\right)$$

$\sin$

$$\sin(x^2 - 2,57) - \sin\left(\frac{\pi(1-2x)}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{100x^2 - 257 - 50\pi + 100\pi x}{200}\right) \cdot \cos\left(\frac{100x^2}{200}\right) = 0$$

$$\frac{-257 + 50\pi - 100\pi x}{200} = 0$$

$$100x^2 - 257 - 50\pi + 100\pi x = 200\pi$$

$$100x^2 - 257 + 50\pi - 100\pi x = 100\pi + 200\pi$$

полагая $\pi = 0$ в обе чл-а и
найдя минимальные из корней

Answer;

$$X = \frac{-5\pi + \sqrt{25\pi^2 + 257 + 50\pi}}{10}$$

$$\frac{50\angle 0^\circ + \sqrt{25\pi^2 + 257} - 50\pi}{10} > \frac{-50\pi + \sqrt{25\pi^2 + 257} + 50\pi}{10}$$

10022V

Ans: $X = \frac{-50\pi + \sqrt{25\pi^2 + 257} + 50\pi}{10}$

Председателю арктической комиссии
олимпиады школьников "Юрки Воробьева
оры!"

Виктору МТЗ имени М.В.
Ломоносова академику В.т.

Саввичу

ученика 10-М класса

МТЗ "Моя-моя" №3, имени

А.С. Макаренко, г. Смирновская

Ильинко Юлиана Сергеевна

Арктика.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (75) за
мою работу по математике, поскольку считаю, что:

1) Из-за технической ошибки в решении задачи №2 кат
первой страницы. Прошу не снимать за это баллы, так как
там описывались лишь обозначения гипотенузы через x , а также общезна-
ваемые факты, которые я буду применять в дальнейшем решении,
такие как: катет равен среднему пропорциональному между
гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу; радиус
вписанной окружности прямоугольного треугольника равен
разности полупериметра и гипотенузы этого треугольника.

2) Я не знаю какая оценка была дана моей решению задачи N3, но попрошу пересмотреть это оценивание, так как все важные случаи учтены, забыты только случаи касания.

3) Так же как и в п.2, я не знаю как была оценена задача N5, но пересмотрите, пожалуйста, так как не рассмотрено только почти очевидное сравнение 4 чисел из-за нехватки времени.

Спасибо за рассмотрение моей апелляции,
С искренним уважением к вам и вашей команде.

31.05.2020

Ф. Луизу