МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кротов Михаил Даниилович**

Технический балл: **95**

Дата: **17 мая 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–1

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_k\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2{,}57\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

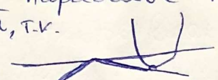
имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

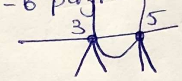
№5 - продолж.

При $a \geq 0$

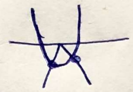
- $a=0 \Rightarrow -a|x-a|$ - прямая $Ox \Rightarrow$ 2 корня
- $a \in [0; a_0)$ - 2 корня, где $a_0|x-a_0|$ касается параболы правой ветвью.
- $a \in (a_0; 3)$ - нет корней, т.к. наклона k при ветвях $-a|a-x| < k$ накл. для касания, ветви параболы и $-a|a-x|$ - в разные напр. отн Ox.



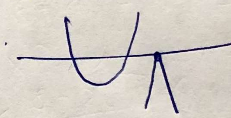
- $a \in a_0; 3; 5$ - 1 корень (проверим подставив)



- $a \in (3; 5)$ - 2 корня:



- $a \in (5; +\infty)$ - 0 корней, т.к. ветви у параболы и $-a|x-a|$ смотрят в разные напр, и k и обеих ветвях $-a|x-a|$ уже слишком велик для касания части параболы, лежащей ниже Ox.



Осталось найти a_0:

$x^2-8x+5=-ax+a^2$; $x>a$; $a>0$, 1 корень

$\Rightarrow x^2-(8-a)x+15-a^2=0$

$\Rightarrow D=(8-a)^2-4(15-a^2)=0$

$\Rightarrow a=\frac{8 \pm 2\sqrt{11}}{5} \Rightarrow a=\frac{8-2\sqrt{11}}{5}$, второй не подходит

$\Rightarrow$ Ответ.

2 корня | 2к. | 2к. | 1к | 0к. | 1к | 2к. | 1к. | 0к.

a: $-\infty$ ... 0 ... $\frac{8-2\sqrt{11}}{5}$ ... 3 ... 5 ... $+\infty$

№ 5.

$x^2 + a|x-a| = 8x - 15.$

$x^2 - 8x - 15 = -a|x-a|$

обычн. парабола с корнями 3 и 5

разветвленная линейная конструкция V с корнем $x=a$ и ветвями $-ax+a^2$ и $ax-a^2$

При $a<0$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-8x+5=-ax+a^2,\ x>a \\ x^2-8x+5=ax-a^2,\ x<a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (1)\ x^2-(8-a)x+(5-a^2);\ x>a \\ (2)\ x^2-(8+a)x+(5+a^2);\ x<a \end{array}\right.$$

$\longrightarrow D=(8-a)^2-4(15-a^2)= = 5a^2-16a+4>0$ при $a>0$

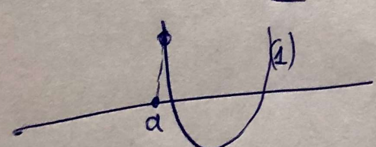
$\longrightarrow D=(8+a)^2-4(15+a^2)= =-3x^2+6x+4<0$ при $a<\frac{8-2\sqrt{19}}{3}$ (корень D)

Легко проверить что на $a\in\left[\frac{8-2\sqrt{19}}{3};0\right]$ все x_0-корни$>a$

$\Rightarrow$ (2) - 0 корней

(1) же всегда имеет 2 корня вида

$\frac{8-a\pm\sqrt{5a^2-16a+4}}{2}>a$ (легко проверяется)



т.к. $a^2-(8-a)a+(5-a^2)>0$

(1) где $x=a$ при $a<0$

$a^2-8a+\cancel{a^2}-5-\cancel{a^2}>0$

$a^2-8a-5>0$ при $a<0$

$\Rightarrow$ при $a\in(-\infty;0)$ - ровно 2 корня.

№4

Пусть a и b - первые 2 ребра; c - третье, d - диагональ.

По т. Пиф $d^2 = a^2+b^2+c^2$

Составим систему из условия:

$$\begin{cases} a+b=2020 \\ a\cdot b = c \\ a^2+b^2+c^2 = (c+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2020 \\ a\cdot b = c \\ a^2+b^2 = 2c+1 \end{cases}$$

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2020^2 - 2c$$

$$\Rightarrow 2020^2 - 2c = 2c+1$$

$$2020^2 = 4c+1$$

$$c = \frac{2020^2-1}{4}$$

$$\Rightarrow d = c+1 = \frac{2020^2-1}{4}+1 = \frac{2020^2+3}{4}$$

Ответ: $d = \frac{2020^2+3}{4}$

№ 3.

$\sin(x^2-2{,}57)=\cos(\pi x)$

При $x=1$ $\sin(x^2-2{,}57) \overset{\text{чуть}}{>} -1$; $\cos(\pi x)=-1$

$\sin(x_0^2-2{,}57)=-1$ при $x_0 \in (0;1)$, далее

$\sin(x_0^2-2{,}57)\nearrow$; а до $\cos(\pi x)=-1$ $\cos(\pi x)\searrow$

$\Rightarrow$ будем искать min корень на отрезке от 0 до 1.

$\sin(x^2-2{,}57)=\cos(\pi x)$

$x^2-2{,}57=\arcsin(\cos(\pi x))$; $x\in[0;1]$

$\Rightarrow x^2-2{,}57=\frac{\pi}{2}-\pi x$

$x^2+\pi x-2{,}57-\frac{\pi}{2}=0$

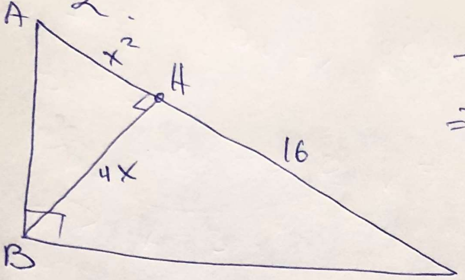
$D=\pi^2+4\left(\frac{\pi}{2}+2{,}57\right)=\pi^2+2\pi+10{,}28$

$\Rightarrow x=\dfrac{-\pi\pm\sqrt{\pi^2+2\pi+10{,}28}}{2}$, $x\in[0;1]$

$\Rightarrow x=\dfrac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+10{,}28}}{2}$, что чуть меньше 1 ($x\approx 0{,}99\ldots$)

Ответ: $x=\dfrac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+10{,}28}}{2}$

№2.



П $AH = x^2$; $x > 0$

$\Rightarrow$ в силу $\triangle ABH \sim \triangle BCH$

$\Rightarrow BH = \sqrt{16x^2} = 4x$

$\Rightarrow$ По Т. Пифагора:

$AB = \sqrt{(x^2)^2 + (4x)^2} = x\sqrt{x^2+16}$

$BC = \sqrt{(4x)^2 + 16^2} = \sqrt{x^2+16}$

$AC = x^2 + 16.$

$S_{ABC} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, где a и b - катеты, c - гип ABC

$\Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2}$

$a \cdot b = (a+b+c) \cdot r$; $r = 5$

$\Downarrow$

$x\sqrt{x^2+16} \cdot 4\sqrt{x^2+16} = \left(x\sqrt{x^2+16} + 4\sqrt{x^2+16} + (x^2+16)\right) \cdot 5$

$4x(x^2+16) = (5x+20)\sqrt{x^2+16} + 5(x^2+16)$

$(4x-5)(x^2+16) = 5x+20\underbrace{\sqrt{x^2+16}}_{\neq 0}$

$\Rightarrow (4x-5)\sqrt{x^2+16} = 5x+20$ / в квадрат

$\Rightarrow 16x^4 - 40x^3 + 281x^2 - 640x + \cancel{400} = 25x^2 + 200x + \cancel{400}$

$16x^4 - 40x^3 + 256x^2 - 840x = 0$; $x > 0$

$\Rightarrow 16x^3 - 40x^2 + 256x - 840 = 0$

$2x^3 - 5x^2 + 32x - 105 = 0$; при $x = 3$ подходит

$\Rightarrow (x-3)\underbrace{(2x^2+x+35)}_{\text{нет корней}} = 0$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow AH = 9$

Ответ: 9.

№1. $\{b_i\}$; разность $= k > 0$

$b_1 = 1$

$b_{b_2} = 10 \Rightarrow b_{1+k} = 10 \Rightarrow b_1 + k \cdot k = 1 + k^2 = 10,\ k>0$

$\Rightarrow k = 3$ $\qquad k = \boxed{3}$

$\Rightarrow b_4 = 10$

$b_{b_{b_{\boxed{3}}}} = b_{b_{b_4 - \boxed{3}}} = b_{b_7} = b_{1+\boxed{3}\cdot 6} = b_{19} =$

$= 1 + 18 \cdot \boxed{3} = 55$.

Ответ: 55