



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Смирнов Андрей Сергеевич**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_n\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$.
Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,57) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

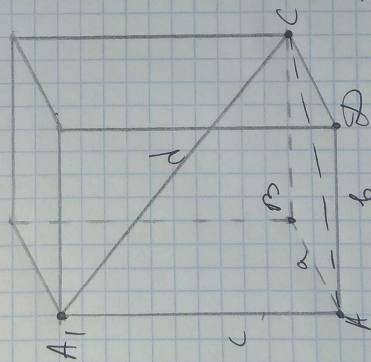
5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

④



$$ab = c$$

$$a + b = 2020$$

$$d = c + 1 \Rightarrow c$$

$$d = ?$$

T.K. nap-9 nyaraly, to

$$A C^2 = AB^2 + BD^2 \quad (\text{vet. szag.})$$

$$A_1 C^2 = AA_1^2 + AC^2 =$$

$$= AA_1^2 + AB^2 + BD^2 = c^2 + a^2 + b^2$$

$$= d^2$$

$$c = d - 1 \Rightarrow \text{nyaraly!} \quad d^2 = (d-1)^2 + a^2 + b^2$$

$$d^2 = d^2 - 2d + 1 + (a+b)^2 - 2ab \Leftrightarrow -2d + 1 + 2020^2 - 200$$

$$c = d - 1 - \text{nyaraly!} \Rightarrow -2d + 1 - 2d + 2 + 2020^2 = 0$$

$$d = \frac{3 + 2020^2}{4} = 1020100,75$$

Amber: 1020100,75.

8) no. of roots

$$\text{Answer: } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 1028 + 2\pi}}{2}$$

$$2) \quad x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \quad \pi - \sqrt{\pi^2 + 4(2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi\pi)} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi\pi \leq 0$$

$$\pi \leq \frac{-2,57 - \frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{-2,57}{2\pi} - \frac{1}{4}$$

$$\pi < 3,2 \Rightarrow \pi \leq \frac{-2,57}{2 \cdot 3,2} - \frac{1}{4} < -0,65 \Rightarrow \pi \leq -1$$

π наиб., тогда x_2 - наим. полож. корень

$$x_2 = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 + 4(2,57 - \frac{3\pi}{2})}}{2} = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 + 10,28 - 6\pi}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 10,28 + 2\pi}}{2}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{2\pi - \sqrt{\pi^2 + 10,28 - 6\pi} - \sqrt{\pi^2 + 10,28 + 2\pi}}{2}$$

$$\text{За } u = \pi^2 - 2\pi + 10,28$$

$$\text{получу: } x_2 - x_1 = \frac{2\pi - \sqrt{u - 4\pi} - \sqrt{u + 4\pi}}{2}$$

$$\text{Докажу, что } x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{u - 4\pi} + \sqrt{u + 4\pi}} < 2\pi$$

Это сумма 2-х монотонно возрастающих ф-ий и при $u \geq \pi^2 + 4$ получим, что это выраж. больше или равно $\sqrt{\pi^2 - 4\pi + 4} + \sqrt{\pi^2 + 4\pi + 4} = (\pi - 2) + (\pi + 2) = 2\pi$ т.к. $\pi \geq 2$

У монотонности следует, что при $u < \pi^2 + 4$ $\sqrt{u - 4\pi} + \sqrt{u + 4\pi}$ будет вып-ся. Докажем, что оно вып-ся. Действительно:

$$\pi^2 - 2\pi + 10,28 < \pi^2 + 4 \Leftrightarrow 2\pi - 6,28 > 0 \Leftrightarrow \pi > 3,14$$

т.е. чтобы оно вып-ся необходимо, чтобы $\pi > 3,14$, что является истиной $\Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow x_1$ - наим.

$$\textcircled{3} \quad \ln(x^2 - 2,57) = \cos(\pi x) = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)$$

$$\ln(x^2 - 2,57) - \ln\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = 0$$

$$2 \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 2,57 - \frac{\pi}{2} + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x^2 - 2,57 + \frac{\pi}{2} - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 2,57 - \frac{\pi}{2} + \pi x}{2} = \pi n \\ \frac{x^2 - 2,57 + \frac{\pi}{2} - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array} \right. , n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + \pi x - (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 0 \\ x^2 - \pi x - (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Дискрим. } D = \pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)}}{2} \\ x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)}}{2} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)}}{2} \\ x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)}}{2} \end{array} \right.$$

Чтобы были корни, дискриминант должен быть неотрицательным ($D \geq 0$), то есть $x \geq 0$, во 2-м $\sqrt{D}$ (знак

$$1) \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)} \geq \pi \Leftrightarrow D \geq \pi^2 \Rightarrow 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2} + 2\pi n) \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \Leftrightarrow (D \geq 0) \quad n \geq -\frac{2,57}{2\pi} - \frac{1}{4}$$

$$n > 3 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$$

$$n > \frac{-2,57}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4} \approx -0,4 \Rightarrow n_{\min} = 0, \text{ т.к. } x_1 - \text{наим. корень}$$

$$\text{тогда } x_1 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 4 \cdot (2,57 + \frac{\pi}{2})}}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ во 2-м выр. для x нет смысла рассм. с $\sqrt{D}$, т.к. оно будет больше $x \geq \frac{\pi}{2}$

$$p\gamma = \frac{AC \cdot BC}{2} \Rightarrow p = \frac{AC \cdot BC}{2\gamma}$$

$$6(11): \gamma = \frac{AC \cdot BC}{2\gamma} - 16 - x \quad (2)$$

3) $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ т.к. $\angle AHC = \angle ACB = 90^\circ$ (по к. углы)
 $\angle CAB$ — общий

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = AH \cdot AB = 16 \cdot AB = 16 \cdot (16+x)$$

аналогично $\triangle BHC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC^2 = BH \cdot AB =$
 $= x(16+x)$

Подст. в (2):

$$5 = \frac{(16+x)\sqrt{16x}}{10} - 16 - x = \frac{4\sqrt{x}(16+x)}{10} - 16 - x \quad | \cdot 5$$

$$25 = 2\sqrt{x}(16+x) - 80 - 5x \Leftrightarrow 105 + 5x = 2\sqrt{x}(16+x)$$

$$t = \sqrt{x}, \quad 0 \leq t < \infty \Rightarrow$$

$$105 + 5t^2 = 2t(16+t) \Leftrightarrow 2t^3 - 5t^2 + 32t - 105 = 0$$

подстановка $t=3$ — корень.

По теореме Безу делим на $(t-3)$:

$$\begin{array}{r} 2t^3 - 5t^2 + 32t - 105 \\ - (2t^3 - 6t^2) \\ \hline t^2 + 32t - 105 \end{array} \quad | \quad t-3$$

$$t^2 + 32t$$

$$- (t^2 - 3t)$$

$$35t - 105$$

$$- (35t - 105)$$

$$0$$

$$(2t^2 + t + 35)(t-3) = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 35 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$$

$$t = 3 - \text{единств. корень}$$

$$\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$$

Ответ: $x=9$.

вариант 4-1

① $b_1 = 1, b_2 = 10; \therefore b_n = ? \quad n = b_2$

d - разность арифм. прог.

$$b_2 = b_1 + d = 1 + d$$

$$b_{b_2} = b_{1+d} = 1 + d(1+d-1) = 1 + d^2 = 10 \Rightarrow d = 3$$

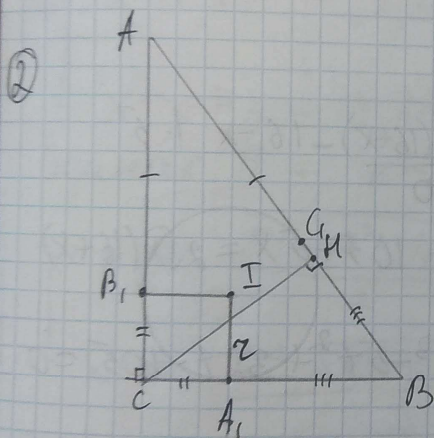
$$b_3 = 1 + 2 \cdot d = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$$n = b_{b_3} = b_7 = 1 + 6 \cdot d = 1 + 6 \cdot 3 = 19$$

$$b_n = b_{19} = 1 + 18 \cdot d = 1 + 18 \cdot 3 = 55$$

$d = -3$ (не ур., т.к. ариф. прогр., ко $d > 0$)

ответ: $b_n = 55$.



ABC - прямоугол. с $\angle C = 90^\circ$

A_1, B_1, C_1 - т. кас. впис. окр-ти (центра I)

CH - высота $r = 5$

$AH = 16; BH = x - ?$

Решение:

1) $CA_1 = CB_1; AB_1 = AC_1; BC_1 = BA_1$ (т.к. A_1, B_1, C_1 - т. кас. впис. окр-ти $\Rightarrow$ эти отрезки - касательные к окр-ти)

p - полупериметр ABC

$$CB_1 + CA_1 + AB_1 + AC_1 + BC_1 + BA_1 = 2p \Rightarrow CB_1 + BC_1 + AC_1 = p$$

$$CB_1 + AB = p \Rightarrow CB_1 = p - AB$$

$\angle CB_1I = \angle IA_1C = 90^\circ$ т.к. B_1, A_1 - т. кас. I - центр окр-ти

$\angle B_1CA_1 = 90^\circ$ по усл. $\Rightarrow CB_1IA_1$ - кв-т $\Rightarrow IA_1 = B_1C \Rightarrow$

$$CA_1 = CB_1 \quad r = p - AB \Rightarrow r = p - 16 - x(1)$$

2) $S_{ABC} = pr$, т.к. ABC - д-к; $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$, т.к. $AC \perp BC$