МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Разин Арслан Дмитриевич**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№ 1

Пусть первый член прогрессии равен q, второй – dq, … шестой d^5q. Из условия имеем:

1) $q+dq+d^2q+d^3q=4\cdot10=40$

2) $d^2q+d^3q+d^4q+d^5q=4\cdot90=360$

Но $d^2q+d^3q+d^4q+d^5q=d^2(q+dq+d^2q+d^3q)=$
$=d^2\cdot40=360\Rightarrow d^2=9$. Тогда имеем 2 случая:

а) $d=3$: $q+dq+d^2q+d^3q=q\cdot\dfrac{d^4-1}{d-1}$ – т.к. $d\neq1$, то это верно. Но тогда $q\cdot\dfrac{d^4-1}{d-1}=40\Leftrightarrow q\cdot\dfrac{3^4-1}{3-1}=q\cdot\dfrac{80}{2}=$
$=40q=40\Rightarrow q=1$. Тогда последний член равен $d^5q=$
$=3^5\cdot1=243$

б) $d=-3$: $q+dq+d^2q+d^3q=q\cdot\dfrac{d^4-1}{d-1}$ – т.к. $d\neq1$, то это верно. Тогда $q\cdot\dfrac{d^4-1}{d-1}=40\Leftrightarrow q\cdot\dfrac{(-3)^4-1}{-3-1}=q\cdot\dfrac{80}{-4}=$
$=-20q\Rightarrow q=-2$. Тогда последний член равен $(-2)\cdot(-3)^5=$
$=2\cdot243=486$.

Ответ: 243 или 486.

№2

$\sin(5x^\circ) = \sin(\pi x)$

$\sin\left(\frac{\pi x}{36}\right) = \sin(\pi x)$

$\sin(\pi x) - \sin\left(\frac{\pi x}{36}\right) = 0$

$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \frac{\pi x}{36}}{2}\right) = 0$

$\sin\frac{\pi x \cdot 35}{72} \cdot \cos\frac{\pi x \cdot 37}{72} = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{35\pi x}{72} = 0 \\ \cos\frac{37\pi x}{72} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{35\pi x}{72} = \pi n_1, \ n_1 \in \mathbb{Z}. \\ \frac{37\pi x}{72} = \frac{\pi}{2} + \pi n_2, \ n_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 35x = 72 n_1 \\ 37x = 36 + 72 n_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{72 n_1}{35} \\ x = \frac{36 + 72 n_2}{37}. \end{array}\right.$

Минимальное расстояние между корнями первой серии равно $\frac{72((n_1+1) - n_1)}{35} = \frac{72}{35} > 1$, между корнями второй: $\frac{72(n_2+1) + 36 - 72n_1 - 36}{37} = \frac{72}{37} > 1$.

А между корнями разных серий (нет совп., иначе это один и тот же корень, лежащий в двух сериях),

$\min\limits_{\frac{72n_1}{35} \neq \frac{72n_2+36}{37}} \left| \frac{72n_1}{35} - \frac{72n_2+36}{37} \right| = \min\limits_{\frac{2n_1}{35} \neq \frac{2n_2+1}{37}} \left\{ 36 \cdot \left| \frac{2n_1}{35} - \frac{2n_2+1}{37} \right| = \right.$

$= \min\limits_{74n_1 \neq 35 + 70n_2} \frac{36}{35 \cdot 37} \left| 74n_1 - 35 - 70n_2 \right|$, где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Заметим, что значение в модуле при $74n_1 \neq 35 + 70n_2$ хотя бы 1 (например при $n_1 = n_2 = 9$, тогда $74n_1 \neq 35 + 70n_2$) Поэтому минимальное расстояние между разными сериями, кроме 0 равно $\frac{36}{35 \cdot 37}$, оно $< 1 \Rightarrow$ оно будет ответом.

Ответ: $\frac{36}{35 \cdot 37}$

№3

Пусть первый угол равен α, второй ~~из~~ тогда 2α.

Тогда для 3-го угла есть 2 варианта:

1) 3 угол в 3 раза больше 1-го $\Rightarrow$ 3-й угол $= 3\alpha$.

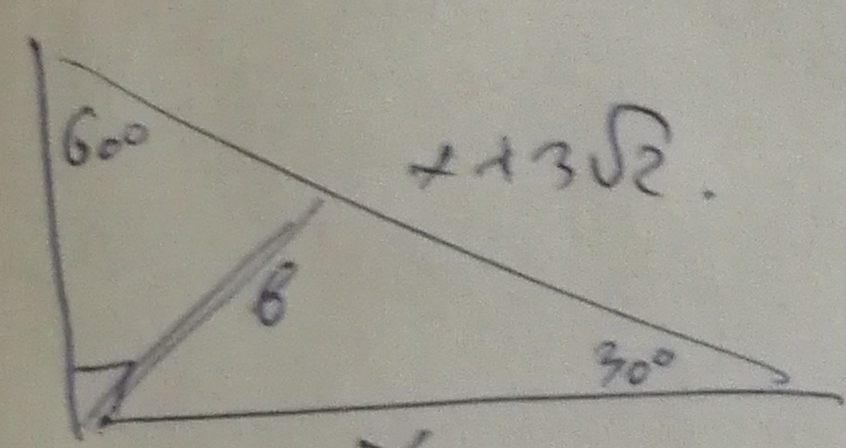
2) 3 угол в 3 раза больше 2-го $\Rightarrow$ 3-й угол $= 6\alpha$.

Тогда в 1) $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \Delta$ - прямоугольный.

2) $\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ \Rightarrow$ углы Δ — 20°, 40° и 120°.

Решим в обоих случаях.

1)



Из условия если больший катет x, то гипотенуза $x+3\sqrt{2}$, тогда $(x+3\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = x$ — в прямоуг. Δ с остр. углом 60° и гипотенузой a больший катет равен $a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x + \frac{3\sqrt{6}}{2} = x \Rightarrow x\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}$

Пусть длина искомой ~~гипотенузы~~ биссектр. в. Тогда запишем S двумя способами: $\frac{x\cdot(x+3\sqrt{2})}{4} = \frac{1}{2}\left(в\cdot x\cdot\sin 45^\circ + в\cdot\frac{(x+3\sqrt{2})}{2}\cdot\sin 45^\circ\right) \Rightarrow x\cdot(x+3\sqrt{2}) = 2в\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{x+3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x+3\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,в\cdot\left(\frac{3x+3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow в = \frac{2x(x+3\sqrt{2})}{\sqrt{2}(3x+3\sqrt{2})} =$

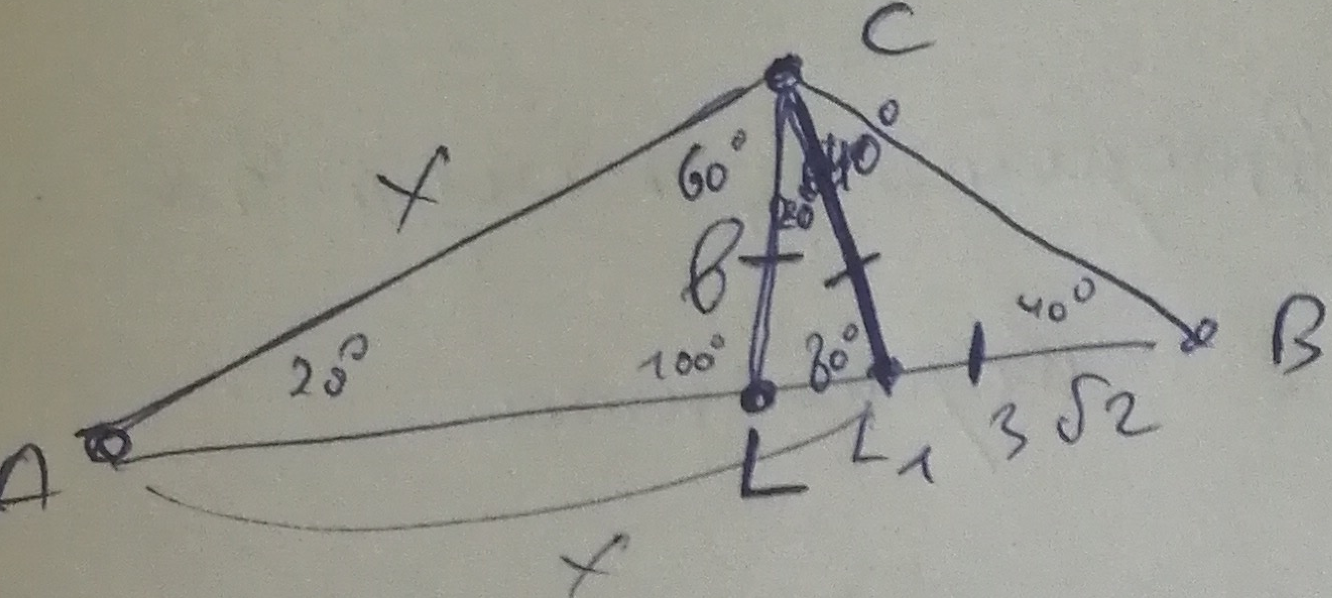
$= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{x(x+3\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{3\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}+3\sqrt{2}\right)}{\frac{3\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}\left(3\sqrt{6}+3\sqrt{2}\cdot(2-\sqrt{3})\right)}{3\sqrt{6}+\sqrt{2}(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}\cdot(3\sqrt{6}+6\sqrt{2}-3\sqrt{6})}{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{6}\cdot 6\sqrt{2}}{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} =$

$= \frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = 3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 9-\sqrt{3}$

г)



Проведём биссектрису угла 120°. Заметим, что если отложить 20° внутри угла 60°, то получится равнобедренный △ со стороной x => ~~[illegible]~~

$BL_1 = \cancel{x} + 3\sqrt{2} - x = 3\sqrt{2}$ => т.к. $\angle L_1CB = \angle L_1BC = 60° - 20° = 40°$, то $CL_1 = 3\sqrt{2}$. А $\angle CLL_1 = 180° - 100°$ => $CL = CL_1 = 3\sqrt{2}$.

Значит искомая биссектриса равна $3\sqrt{2}$.

Ответ: либо $9 - \sqrt{3}$; либо $3\sqrt{2}$.

№4

На отрезке $[-6;5]$ 12 целых чисел.

Заметим, что для любого a корнем уравнения будет $x=-1$, т.к. $3x^3+(3a+13)x^2+(7a+9)x-(a+1)=$
$=(x+1)(3x^2+(3a+10)x-(a+1))$.

Т.к. $-1\in\mathbb{Z}$, то осталось найти такие a, для которых у уравнения $3x^2+(3a+10)x-(a+1)=0$, будут 2 корня, при этом ~~будет~~ ~~[illegible]~~ хотя бы 1 целый корень и оба корня различны и отличны от -1. Чтобы корней у исходного было 3, нужно, чтобы у $3x^2+(3a+10)x-(a+1)$ дискриминант был положительным, так как его корни:

$$\frac{-(3a+10)\pm\sqrt{(3a+10)^2+4\cdot3\cdot(a+1)}}{6}=\frac{-(3a+10)\pm\sqrt{9a^2+72a+112}}{6}=$$

$$=\frac{-(3a+10)\pm\sqrt{(3a+12)^2-32}}{6}$$

Так как хотя бы один из этих двух корней целый, то $\sqrt{(3a+12)^2-32}\in\mathbb{Z}$, т.е. корень можно извлечь: $\sqrt{(3a+12)^2-32}=b$, где $b\geq0$ и $b\in\mathbb{Z}$, т.е. $(3a+12)^2-b^2=32$. Т.е. также подойдут только те a, для которых существует такое b. Переберём все a:

1) $a=-6$, тогда $(3a+12)^2=36$, для него такое b есть — $b=2$, т.к. $36-2^2=32\Rightarrow a=-6$ подходит.

Для $-5\leq a\leq-3$ дискриминант будет отрицательным, т.к. для них $(3a+12)^2<32$

2) $a=-2$, тогда $(3a+12)^2=36$, для него такое b есть — $b=2$, ~~но тогда~~ т.к. $36-2^2=32\Rightarrow a=-2$ подходит

3) $a=-1$, тогда $(3a+12)^2=81$, для него такое b есть — $b=7$, т.к. $81-49=32\Rightarrow a=-1$ подходит.

~4 (продолжение)

4) $a=0$, тогда $(3a+12)^2=144$, но $144-32=112$ — не точн. квадрат $\Rightarrow$ $a=0$ — не подходит.

5) $a=1$, тогда $(3a+12)^2=225$, но $225-32=193$ — не точн. квадрат $\Rightarrow$ $a=1$ не подходит.

6) $a=2$, тогда $(3a+12)^2=324$, но $324-32=292$ — не точн. квадрат $\Rightarrow$ $a=2$ не подходит.

Для $2\le a\le 5$ ~~следующий после~~ $(3a+12)^2-32$ будет больше ближайшего полного квадрата, меньшего $(3a+12)^2$, а именно $(3a+11)^2=9a^2+66a+121$, т.к. $(3a+12)^2-32=9a^2+72a+112=(3a+11)^2+6a-9$, а для $2\le a\le 5$ $6a-9>0$ $\Rightarrow$ $(3a+12)^2-32$ не будет полным квадратом для $2\le a\le 5$, т.к. лежит строго между $(3a+12)^2$ и $(3a+11)^2$ — соседними квадратами.

Осталось проверить, что для $a=-6;-2;-1$ все 3 корня были различными, т.е.:

1) $a=-6$, тогда у $3x^2+(3a+10)x-(a+1)=0$ корни:

$$\frac{-(3a+10)\pm\sqrt{(3a+12)^2-32}}{6}=\frac{-(-8)\pm 2}{6}=\frac{8\pm 2}{6}=1;\ \frac{5}{3}$$

— различны и отличаются от -1

2) $a=-2$, тогда корни: $\frac{-(10-6)\pm 2}{6}=\frac{-4\pm 2}{6}=-1;-\frac{1}{3}$ — совпадает с -1, т.е. $a=-2$ не подойдёт.

3) $a=-1$, тогда корни: $\frac{-7\pm 7}{6}=0;-\frac{7}{3}$ — различны и отличаются от -1.

Тогда из всех 12 целых чисел подойдут только 2 — (-6) и (-1), т.е. вероятность победить $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$

№5

В словаре этого племени 1 3-буквенное слово: ОТО; 1 — 4-х буквенное: ОТТО и 1 — 5-буквенное: ОТОТО. Посмотрим на какое-либо слово длины больше 5: его последние буквы либо: ...ОТО, либо ...ОТТО. Т.е. любое слово длины n $(n>5)$ можно получить добавлением сзади либо конструкции „ТО" к слову длины $n-2$, либо конструкции „ТТО" к слову длины $n-3$. Пусть слов длины n будет T_n. Тогда $T_3=1$; $T_4=1$; $T_5=1$. А формула для $n>5$ имеет вид: $T_n = T_{n-2}+T_{n-3}$. Тогда построим таблицу количество слов:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151

Значит в словаре 151 22-буквенное слово.

Ответ: 151