МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Богданов Александр Иванович**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Вариант 1

①

Пусть были: b_0; b_0q; b_0q^2; b_0q^3; b_0q^4; b_0q^5

1. $\frac{b_0+b_0q+b_0q^2+b_0q^3}{4}=15 \Rightarrow b_0(1+q+q^2+q^3)=60$

2. $\frac{b_0q^2+b_0q^3+b_0q^4+b_0q^5}{4}=60 \Rightarrow b_0q^2(1+q+q^2+q^3)=240$

Тогда $q^2\cdot 60=240 \Rightarrow q=\pm 2$

Значит а) $q=2$: $b_0(1+2+4+8)=60$; $b_0\cdot 15=60 \Rightarrow b_0=4$

б) $q=-2$: $b_0(1-2+4-8)=60$; $b_0\cdot(-5)=60 \Rightarrow b_0=-12$

Тогда $\left[\begin{array}{l} b_0q^5=4\cdot 2^5 \\ b_0q^5=-12\cdot(-2)^5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_0q^5=128 \\ b_0q^5=384 \end{array}\right.$

Ответ: последний член может быть равен 128 или 384

② $\sin(\pi x)=\sin(3x^\circ)$

$2\sin\left(\frac{\pi x-3x^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x+3x^\circ}{2}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x-3x^\circ}{2}=\pi k \\ \frac{\pi x+3x^\circ}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \pi x-3x^\circ=2\pi k \\ \pi x+3x^\circ=\pi+2\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \pi x-\frac{3x\pi}{180}=2\pi k \\ \pi x+\frac{3x\pi}{180}=\pi+2\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{60}x=2k \\ x+\frac{1}{60}x=1+2k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{59}{60}x=2k \\ \frac{61}{60}x=1+2k \end{array}\right.$

$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\left[\begin{array}{l} x=\frac{120}{59}k \\ x=\frac{60}{61}+\frac{120}{61}k \end{array}\right.$

Тогда $\Delta x_1=\frac{120}{59}k_1-\frac{120}{59}k_1'=\frac{120}{59}(\cancel{k_1-k_1'})^1=\frac{120}{59}$

$\Delta x_2=\cancel{\frac{60}{61}}+\frac{120}{61}k_2-\cancel{\frac{60}{61}}-\frac{120}{61}k_2'=\frac{120}{61}(\cancel{k_2-k_2'})^1=\frac{120}{61}$

$\Delta x_{12}=\frac{120}{59}k_1-\frac{60}{61}-\frac{120}{61}k_1=60\left(\frac{2}{59}k_1-\frac{1+2k_2}{61}\right)=\frac{60}{59\cdot 61}(122k_1-59-118k_2)=$

(минимум при $k_1=15$, а $k_2=15$: $122k_1-59-118k_2=1$, т.е. минимум) $=$

$=\frac{60}{59\cdot 61}=\frac{60}{3599}$

Т.к. $\frac{60}{3599}<\frac{120}{59}$ и $\frac{60}{3599}<\frac{120}{61}$, то $\frac{60}{3599}$ – минимум.

Ответ: $\frac{60}{3599}$

4) $3x^3-(3a-4)x^2-(2a-3)x+a+2=0$

$3x^3+(4-3a)x^2+(3-2a)x+a+2=0$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+(4-3a)x^2+(3-2a)x+a+2 & x+1 \\ \underline{3x^3+3x^2} & 3x^2+(1-3a)x+(a+2) \\ (1-3a)x^2+(3-2a)x & \\ \underline{(1-3a)x^2+(1-3a)x} & \\ (2+a)x+a+2 & \\ \underline{(2+a)x+a+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$(x+1)(3x^2+(1-3a)x+a+2)=0$

один целый корень -1 есть всегда.

Если D $3x^2+(1-3a)x+a+2$ будет целым квадратом, то могут быть еще целые корни.

$D=(1-3a)^2-12(a+2)=9a^2-6a+1-12a-24=9a^2-18a-23=9(a-1)^2-32$

1. $a=-5$: $D=9\cdot36-32=4(81-8)=4\cdot73$ – не квадрат
2. $a=-4$: $D=9\cdot25-32=193$ – не квадрат
3. $a=-3$: $D=9\cdot16-32=16(9-2)=16\cdot7$ – не квадрат
4. $a=-2$: $D=9\cdot9-32=49$ – квадрат ☑
5. $a=-1$: $D=9\cdot4-32=4(9-8)=4$ – квадрат ☑
6. $a=0$: $D=9-32<0$ – нет корней
7. $a=1$: $D=0-32<0$ – нет корней
8. $a=2$: $D=9-32<0$ – нет корней
9. $a=3$: $D=9\cdot4-32=4$ – квадрат ☑
10. $a=4$: $D=9\cdot9-32=49$ – квадрат ☑
11. $a=5$: $D=9\cdot16-32=16\cdot7$ – не квадрат
12. $a=6$: $D=9\cdot25-32=193$ – не квадрат

1) $a=-2$: $3x^2+7x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ – подходит} \\ x=-\frac{7}{3} \end{array}\right.$

2) $a=-1$: $3x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4\pm2}{6}=\frac{-2\pm1}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ –

не подходит, т.к. корень -1 уже есть

3) $a = 3$: $3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} = \frac{4 \pm 1}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$ – подходит.

4) $a = 4$: $3x^2 - 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right.$ – подходит

Значит подходит 3 из 12 вариантов, т.е. $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: 0,25

5

A АБ → ББ, БА $A_{i+1} = C_i$

B ББ → БА $B_{i+1} = A_i$

C БА → АБ $C_{i+1} = A_i + B_i$

D АА ↛ $A_{i+1} = 0$

	12	23	34	45	56	67	78	89	910	1011	1112	1213	1314	1415	1516	1617	1718	1819	1920
A	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65
B	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49
C	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Но только с заканчивающимися на А, поэтому нас устраивают варианты, которые находятся в строчке С, т.е. 86.

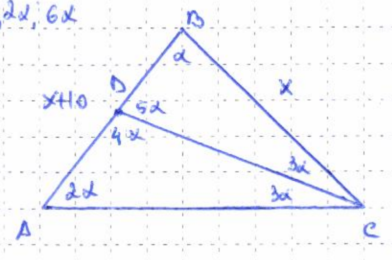
Ответ: 86

3

Возможные углы: α; 2α; 6α или α; 2α; 2α.

Будем пользоваться теоремой синусов и теоремой о том, что против большего угла лежит большая сторона.

1. $\alpha, 2\alpha, 6\alpha$



ΔABC: $\frac{x+10}{\sin 6\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha}$; $\frac{x+10}{3\sin 2\alpha - 4\sin^3 2\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha}$

$\frac{x+10}{3 - 4\sin^2 2\alpha} = x$; $3x - 4x\sin^2 2\alpha = x + 10$

$2x - 4x\sin^2 2\alpha = 10$; $x(1 - 2\sin^2 2\alpha) = 5$

$x \cdot \cos 4\alpha = 5$; $x = \frac{5}{\cos 4\alpha}$

$9\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

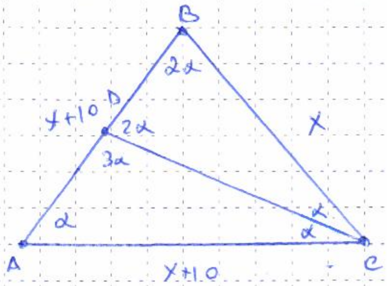
ΔABC: $\frac{|AC|}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha} \Rightarrow |AC| = \frac{x}{2\cos\alpha} = \frac{5}{2\cos\alpha \cos 4\alpha}$

ΔADC: $\frac{|DC|}{\sin 2\alpha} = \frac{|AC|}{\sin 4\alpha} \Rightarrow |DC| = \frac{|AC|}{2\cos 2\alpha} = \frac{5}{4\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ} =$

$= \frac{5}{4} \cdot \frac{8\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ}{8\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8\cancel{\sin 20^\circ}\cdot\cancel{\sin 40^\circ}\cdot\cancel{\sin 80^\circ}}{\cancel{\sin 40^\circ}\cdot\cancel{\sin 80^\circ}\cdot\cancel{\sin 160^\circ}} =$

$= \frac{5}{4}\cdot 8 = 5 \cdot 2 = 10$

2. α, 2α, 2α



ΔABC — равнобедренный

ΔABC: $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+10}{\sin 2\alpha} \Rightarrow x = \frac{x+10}{2\cos\alpha} \Rightarrow 2\cos\alpha\, x = x+10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(2\cos\alpha - 1) = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2\cos\alpha - 1}$

ΔADC: $\frac{x+10}{\sin 3\alpha} = \frac{|DC|}{\sin\alpha} \Rightarrow |DC| = \frac{x+10}{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}\sin\alpha \Rightarrow$

$|DC| = \frac{x+10}{3-4\sin^2\alpha}$

$5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$

т.е. $|DC| = \frac{\frac{10}{2\cos\alpha - 1} + 10}{3-4\sin^2\alpha} = \frac{10 + 20\cos\alpha - 10}{(2\cos\alpha-1)(3-4\sin^2\alpha)} = \frac{20\cos\alpha}{(2\cos\alpha-1)\left(3-4\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\right)} =$

$= \frac{20\cos\alpha}{(2\cos\alpha-1)(3-2+2\cos 2\alpha)} = \frac{20\cos\alpha}{(2\cos\alpha-1)(1+2\cos 2\alpha)} = \frac{20\cos\alpha}{(2\cos\alpha-1)(1+2(2\cos^2\alpha-1))} =$

$= \frac{20\cos\alpha}{(2\cos\alpha-1)(4\cos^2\alpha-1)} = \frac{20\cos\alpha}{(2\cos\alpha-1)^2(2\cos\alpha+1)} = \frac{20\cos 36^\circ}{(2\cos 36^\circ - 1)^2(2\cos 36^\circ+1)}$

Ищем $\cos 36^\circ$: $\cos(3\cdot 36^\circ) = -\cos(2\cdot 36^\circ)$.

: $4\cos^3(36^\circ) - 3\cos(36^\circ) = -2\cos^2(36^\circ) + 1$

$4\cos^3(36^\circ) + 2\cos^2(36^\circ) - 3\cos(36^\circ) - 1 = 0$ $\quad (t = \cos^3 36^\circ)$

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$

$(t+1)(4t^2 - 2t + 1) = 0$

$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 \mid t+1$
$4t^3 + 4t^2 \quad \mid 4t^2 - 2t + 1$
$-2t^2 - 3t$
$-2t^2 - 2t$
$-t - 1$
$-t - 1$
0

$t = -1$ — нет, т.к. $\cos 36^\circ > 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ — нет, т. к. } \cos 36^\circ > 0 \end{array}\right.$

т.е. $|DC| = \frac{20\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{\left(2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4} - 1\right)^2\left(2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}+1\right)} = \frac{5(1+\sqrt{5})}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{5(1+\sqrt{5})}{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{5(1+\sqrt{5})}{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}} = \frac{5(1+\sqrt{5})}{\frac{4}{4}} =$

$= 5(1+\sqrt{5})$

Ответ: 10 или $5(1+\sqrt{5})$

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников
„Покори Воробьёвы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученика 11 класса ГБОУ Президентского ФМЛ 239
(город Санкт-Петербург)
Богданова Александра Ивановича

Апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (90) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что я потерял баллы в третьей задаче (геометрия) при рассмотрении второго случая: углы должны быть не $\alpha; 2\alpha; 2\alpha$, а $\alpha; 2\alpha; 3\alpha$. Я считаю, что это описка и на ход решения задачи не влияет, а влияет только на ответ. Я посмотрел, что можно получить баллы, кратные пяти, поэтому был бы очень рад, если бы Вы подняли итоговый балл с 90 до 95 всвязи с негрубой ошибкой. Спасибо!

30. 05. 20