МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Браженко Александр Сергеевич**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число *a* из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

ЛИСТ 1

Ответ: 243 или 486 №1.

Пусть b – первый член, q – знаменатель.
Понятно, что $q \neq 1$ $\Rightarrow$ Σ первых четырех членов =

$$= b + bq + bq^2 + bq^3 = \frac{b\cdot(q^4-1)}{q-1}$$

Σ последних четырёх $= bq^2 + bq^3 + bq^4 + bq^5 = \frac{bq^2(q^4-1)}{q-1}$

по условию:

т.к. $10 \neq 0 \neq 90$, то разделим ② на ①:

$$\begin{cases} \frac{b(q^4-1)}{4(q-1)} = 10 & ① \\ \frac{bq^2(q^4-1)}{4(q-1)} = 90 & ② \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{b}q^2\cancel{(q^4-1)}}{\cancel{4(q-1)}} \cdot \frac{\cancel{4(q-1)}}{\cancel{b(q^4-1)}} = 9 \rightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$$

1) $q = 3$:

$$\begin{cases} \frac{b\cdot(3^4-1)}{4\cdot 2} = 10 \\ \frac{9b\cdot(3^4-1)}{4\cdot 2} = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b\cdot 80}{8} = 10 \\ \frac{b\cdot 80}{8} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1.$$

если $b = 1$, то последний член $= b\cdot q^5 = 1\cdot 3^5 = \boxed{243}$

2) $q = -3$:

$$\begin{cases} \frac{b\cdot((-3)^4-1)}{4(-3-1)} = 10 \\ \frac{b\cdot 9\cdot((-3)^4-1)}{4(-3-1)} = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b\cdot 80}{-4\cdot 4} = 10 \\ \frac{b\cdot 80}{-4\cdot 4} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b\cdot 5 = 10 \\ -b\cdot 5 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow b = -2$. Тогда посл. член: $b\cdot q^5 = -2\cdot(-3)^5 = \boxed{486}$

Итого, 2 варианта: 243 или 486.

Ответ: $\frac{36}{35\cdot 37} = \frac{36}{1295}$. №2. | ЛИСТ 2

Решение: Понятно, что $1^\circ = \frac{\pi}{180}$, т.е. $5x^\circ = \frac{5\pi x}{180} = \frac{\pi x}{36}$.

т.е. $\sin \pi x = \sin \frac{\pi x}{36} \iff \left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi x}{36} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (1) \\ \pi x = \pi - \frac{\pi x}{36} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \quad (2) \end{array} \right.$

(1): $36\pi x = \pi x + 72\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$35x = 72k,\ k \in \mathbb{Z} \iff \boxed{x = \frac{72k}{35},\ k \in \mathbb{Z}}$

(2): $36\pi x = 36\pi - \pi x + 72\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$37\pi x = 72\pi n + 36\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

$37x = 72n + 36,\ n \in \mathbb{Z}.$

$37x = 36(1+2n),\ n \in \mathbb{Z}.$

$\boxed{x = \frac{36(1+2n)}{37},\ n \in \mathbb{Z}.} \iff \boxed{x = \frac{36m}{37},\ m \in \mathbb{Z},\ m\text{ нечетно}}$

итого, $\left[\begin{array}{l} x = \frac{72k}{35},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{36m}{37},\ m \in \mathbb{Z},\ m\text{ - нечётно.} \end{array} \right.$ (далее k и m точно такие же)

понятно, что в 1ой серии расстояние между корнями $= \frac{72}{35}$, а во второй $\frac{2\cdot 36}{37}$ (т.к. они представляют из себя беск. в обе стороны арифм. прогрессию)

поищем min расстояние между корнями в разных сериях:

$\left| \frac{72k}{35} - \frac{36m}{37} \right| \to \min.$

$= 36 \left| \frac{2k\cdot 37 - 35m}{35\cdot 37} \right| =$

$= \frac{36}{35\cdot 37} \cdot |2k\cdot 37 - 35m| \to \min \iff$

$\iff |2k\cdot 37 - 35m| \to \min \quad \left(\frac{36}{35\cdot 37} = \text{const} \right)$

заметим, что $35m$ нечетно, а $2k\cdot 37$ - четно $\Rightarrow$

$\Rightarrow |2k\cdot 37 - 35m|$ нечетно $\Rightarrow \geq 1.$

Лист 3

, при этом, очевидно, значение достигается,

т.к. это линейное Диофантово уравнение,

$2\cdot 37 = 74 \perp 35 \Rightarrow \exists$ беск. много решений.

Таким образом, $\min\left(\left|\frac{72k}{35} - \frac{36m}{37}\right|\right) =$

$= \frac{36}{35\cdot 37}\cdot 1 = \frac{36}{1295}$. (поскольку $\frac{36}{1295} < 1 < \frac{72}{35}, \frac{72}{37}$)

Ответ: $9+3\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$. №3.

Решение: Пусть в $\triangle ABC$ $\angle B = 2\cdot\angle A$. , $\angle A=\alpha$, $\angle B = 2\alpha$.

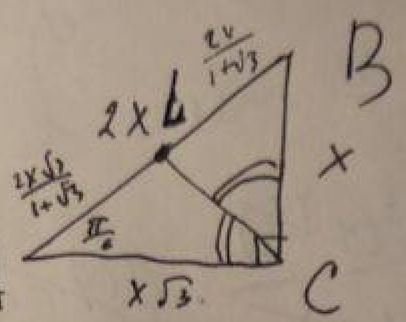
Далее 2 варианта:

1) $\angle C = 3\cdot\angle A$, т.е. $\angle C = 3\alpha$.

тогда $\pi = \angle A+\angle B+\angle C = \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6\alpha$, т.е.
$\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$.

т.е. имеем прямоуг $\triangle$ с $\angle C = 90^\circ$.

тогда гипотенуза AB – max сторона (против max угла).



пусть $BC = x$, $\Rightarrow AB = 2x$, $AC = \sqrt{3}\,x$. $(x>0)$.

AC – средняя (вторая) по величине сторона, т.к. против среднего по величине угла.

т.е. $$2x = x\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \quad \text{(по условию)}.$$

т.е. $x(2-\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$.

пусть CL – биссектриса $\Rightarrow$ по т. о биссектрисе, $AL:LB = AC:CB$,

т.е. $AL = 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $BL = 2x\cdot\frac{1}{1+\sqrt{3}}$.

по ф-ле биссектрисы, $$CL = \sqrt{AC\cdot BC - AL\cdot BL} = \sqrt{x^2\sqrt{3} - 4x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}} =$$

$$= x\sqrt{\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}} = x\sqrt{\frac{\sqrt{3}+6+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}} = \frac{x}{1+\sqrt{3}}\sqrt{6} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}-3} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} =$$

$$= 3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = \boxed{9+3\sqrt{3}}$$

ЛИСТ 5

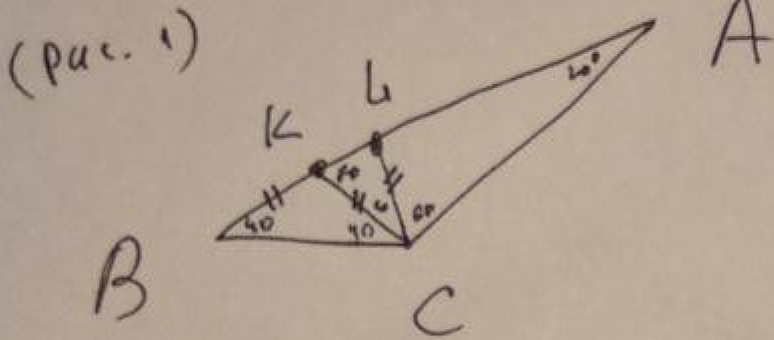
2) $\angle C = 3 \cdot \angle B$, т. е. $\angle C = 6\alpha$.

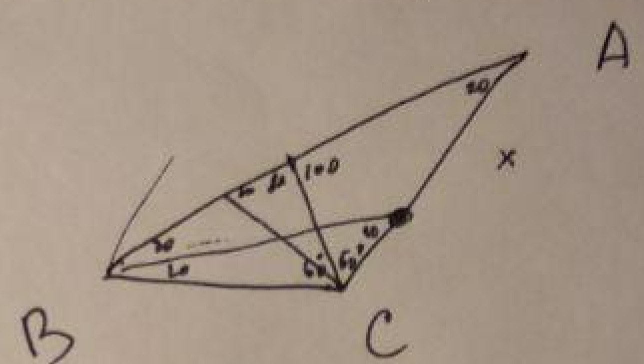
$\pi = \angle A + \angle B + \angle C = \alpha + 2\alpha + 6\alpha = 9\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} = 20°$ $\begin{pmatrix} \angle A = 20° \\ \angle B = 40° \\ \angle C = 120° \end{pmatrix}$

Тогда $\angle A < \angle B < \angle C \Rightarrow BC < AC < AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AC + 3\sqrt{2}$. Пусть CL - биссектриса $\Rightarrow \angle BCL = \angle LCA = \frac{\pi}{3}$

(рис. 1)





Тогда $\angle CLA = \pi - \angle LCA - \angle A = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{9} = 100°$ — тупой.

(т.к. $\angle ACL = \frac{\pi}{3}$, $\angle ALC$ - тупой, то B, K, L, A - последовательно)

построим отрезок CK: $\angle ACK = 80°$, $K \in BA$ (рис. 1)

тогда $\angle LCK = 80° - 60° = 20°$

$\angle AKC = 180° - \angle A - \angle ACK = 180° - 80° - 20° = 80°$ (!) $\Rightarrow \triangle ACK$ р/б, т.е

$AK = CA$. более того, $\angle KCB = \angle BCA - \angle KCA = 120° - 80° = 40° = \angle KBC$ (!) $\Rightarrow \triangle BKC$ р/б, $BK = KC$

Более того (x2), $\angle CLA = 100° \Rightarrow \angle KLC = 180° - 100° = 80° \Rightarrow$ (смежные)

$\Rightarrow \angle CKL = \angle KLC \Rightarrow \triangle KLC$ р/б, $KC = LC$.

Итого, $BK = KC = LC$. Но $AK = AC$, $AB = KB + KA$, т.е.

$AB = BK + AC$, т.е. $BK = 3\sqrt{2}$ (по усл.)

т.е. $BK = KC = LC = 3\sqrt{2}$. $\rightarrow \boxed{CL = 3\sqrt{2}}$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{6}}$.

№4.

ЛИСТ 6

Решение: Заметим, что $x=-1$ – всегда корень:

$-3+3a+13-2a-9-a-1 \equiv 0$ (тождеств.) $\Rightarrow$ поделим на $(x+1)$.

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-a-1 & x+1 \\
\underline{3x^3 \quad 3x^2} & 3x^2+(3a+10)x-a-1 \\
(3a+10)x^2+(2a+9)x & \\
\underline{(3a+10)x^2 \quad (3a+10)x} & \\
(-a-1)x-a-1 & \\
\underline{(-a-1)x-a-1} & \\
0. &
\end{array}
$$

Итого $\Leftrightarrow$ $(x+1)\left(3x^2+(3a+10)x-a-1\right)=0$.

реш. кв-е ур-е: $3x^2+(3a+10)x-a-1=0$.

$3x^2+3ax-a+10x-1=0$

$a(3x-1)=-\left(3x^2+10x-1\right)$

если $x=\frac{1}{3}$: $0=-\frac{1}{3}-\frac{10}{3}+1 \neq 0$. $\Rightarrow x\neq\frac{1}{3}$, поделим на $3x-1\neq 0$

$-a=\dfrac{3x^2+10x-1}{3x-1}=$ ~~$3x^2+10x-1$~~

$=\dfrac{3x^2-x+10x-1+x}{3x-1}=x+\dfrac{11x-1}{3x-1}$. будем искать целые x, для которых $\exists$ целые a.

$-a=x+\dfrac{11x-1}{3x-1}$. Т.к. $-a, x\in\mathbb{Z}$, то $\dfrac{11x-1}{3x-1}\in\mathbb{Z}$.

ЛИСТ 7

если $\frac{11x-1}{3x-1}\in\mathbb{Z}$, то и $3\cdot\frac{11x-1}{3x-1}\in\mathbb{Z}$, т.е.

$\frac{33x-11+11-3}{3x-1}\in\mathbb{Z}$, т.е. $11+\frac{8}{3x-1}\in\mathbb{Z}$,

т.е. $\frac{8}{3x-1}\in\mathbb{Z}$. (т.к. $11\in\mathbb{Z}$) →

⇒ $3x-1\in\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$ (все целые делители числа 8).
(т.к. $x\in\mathbb{Z}$, $3x-1\in\mathbb{Z}$)

Т.к. $3x-1\equiv 2 \pmod 3$, то подойдут $\{-1,2,-4,8\}$.
$(-1\equiv-2\equiv4\equiv-8\equiv1 \pmod 3)$

1) $3x-1=-1 \to x=0 \to -a=0+\frac{0-1}{0-1}=+1 \to \boxed{a=-1}$

2) $3x-1=2 \to x=1 \to -a=1+\frac{11-1}{3-1}=1+\frac{10}{2}=1+5=6.$ $\boxed{a=-6}$

3) $3x-1=-4 \to x=-1$ не подойдет, т.к. этот корень уже был, т.е. у корня -1 будет кратность ≥ 2 → 3х различных корней не будет.

4) $3x-1=8 \to x=3. \to -a=3+\frac{33-1}{9-1}=3+\frac{32}{8}=3+4=7$
$(a=-7)$
не входит в отрезок $[-6;5]$ → не подойдет.

Итого, 2 кандидата для a: $\{-1;-6\}$.

$a=-1$: $3x^3+10x^2+7x=0$ Есть, как минимум, $x=-1$, $x=0$
→ $\boxed{a=-1}$ подходит
$x(3x^2+10x+7)$ → 3ий корень $=-\frac{7}{3}$ подх.

$a=-6$: $3x^3-5x^2-3x+5=0$. Есть, как минимум,
$x=\pm1$ → $\boxed{a=-6}$ подходит $(x^2-1)(3x-5)=0$ → 3ий корень $\frac{5}{3}$ подх.

Итого, 2 варианта подходящих из 12 возможных. $\{-6,\pm5,\pm4,\pm3,\pm2,\pm1,0\}$

Число выбирается случайно → $P=\frac{2}{12}=\boxed{\frac{1}{6}}$

Ответ: 150. №5. ЛИСТ 8.

Решение: Заметим, что после буквы О :

1) если после нее в слове в слове 1 буква, то так не бывает. Т.к. 2 О подряд не идут, а на конце О.

2) если после нее в слове 2 буквы, то это только ТО.

3) если 3 буквы, то только ТТО.

4) если ≥ 4 букв, то следующий блок после нее это обязательно ТО или ТТО

Таким образом, наше слово со 2ой по 22 букву делится на слоги ТО и ТТО

пусть ТО – n штук, ТТО – m штук ($n, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)

ур-е на кол-во букв:

$2n + 3m = 21 \to n \,\vdots\, 3.$ переберем неотриц. решения:

при $n \geq 12$ $2n \geq 24 > 21$ не подх.

n	m
0	7
3	5
6	3
9	1

– все решения.

1) $n = 0, m = 7$. получаем $\boxed{1}$ вариант слова, полностью состоящий из слогов ТТО: (кроме 1ой буквы)

О ТТО ТТО ТТО ТТО ТТО ТТО ТТО

2) $n = 3, m = 5$. О

8 слогов.

выберем места для слогов ТО: C_8^3 вариантов →

→ на остальные позиции встанут слоги ТТО.

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = \boxed{56} \text{ вариантов.}$$

При этом, поскольку каждый слог оканчивается на О и начинается на Т, то каждая расстановка, уникальна и посчитана 1 раз. Это будет верно и в след. пунктах.

3) $n=6, m=3.$

ЛИСТ 9.

О

9 слогов

Выберем места для слогов $\underline{ТТО}$: C_9^3 → на остальные позиции встанут слоги $\underline{ТО}$.

$$C_9^3 = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 3\cdot 4\cdot 7 = 12\cdot 7 = \boxed{84}$$ варианта

4) $n=9, m=1$

О

10 слогов

выберем 1 место для слога $\underline{ТТО}$ → $\boxed{9}$ способов

на остальные встанут слоги $\underline{ТО}$

Итого, $9+84+56+1 = 10+90+50 =$
$= 150$ вариантов 22-буквенных слов в словаре планеты ОТГОГО.