



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Москаленко Тимофей Дмитриевич**

Технический балл: **85**

Дата: **17 мая 2020 года**

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_n\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$.
Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,57) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

$$b_1 = 1, b_{b_2} = 10$$

$b_m = b_1 + d(m-1)$ — формула m -ного члена ариф. пр.п. $d > 0$ (по условию)

$$b_2 = b_1 + d = 1 + d$$

$$b_{b_2} = b_1 + d(b_2 - 1) = b_1 + d^2 = 1 + d^2 = 10 \text{ (по условию)}$$

$$d^2 = 9$$

$$d = 3 \text{ (т.к. } d > 0 \text{ по условию)}$$

$$n = b_{b_3} = b_1 + d(b_3 - 1) = 1 + 3(7 - 1) = 19$$

$$b_n = b_1 + d(n - 1) = 1 + 3 \cdot (19 - 1) = 55$$

$$\text{Ответ: } b_n = 55$$

Из (рис 1) Видно, что $2r = AB + BC - AC$ (1)

Пусть $BH = x^2$, тогда высота $CH = 4x =$

$= \sqrt{AH \cdot BH}$. Остальные стороны по теореме Пифагора.

$$(1): 4\sqrt{16+x^2} + x\sqrt{16+x^2} - (16+x^2) = 10$$

$$(4+x)\sqrt{16+x^2} = (16+x^2) + 10$$

$$(4+x)^2 (\sqrt{16+x^2})^2 = (16+x^2+10)^2$$

$$(x^2+16+8x)(x^2+16) = (16+x^2+10)^2$$

$$8x(x^2+16) = (16+x^2+10)^2 - (16+x^2)^2$$

$$8x(x^2+16) = 10(2x^2+10+32) | :4$$

$$2x^3 + 32x = 5x^2 + \frac{210}{2} | \cdot 2$$

$$4x^3 - 10x^2 + 64x - 210 = 0$$

$x=1$ - не подходит

$$x=3$$

$$4 \cdot 3^3 - 10 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 - 210 = 0 - \text{верно}$$

$$4x^3 - 10x^2 + 64x - 210 = (x-3)(4x^2 + 2x + 70) = 0$$

$$x=3; BH = x^2 = 9$$

Ответ: 9

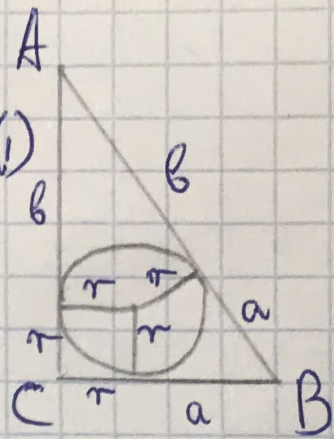


рис. 1

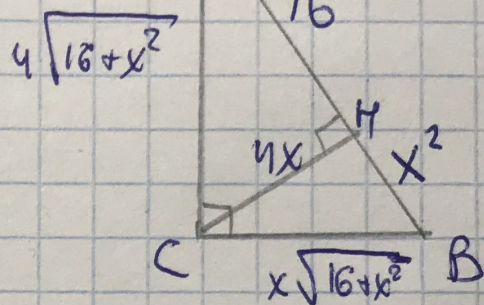


рис. 2

$\sqrt{3}$

При $x=0$:

$$\sin(x^2 - 2,57) = -\sin(2,57) < -1 \quad (\text{т.к. } 2,57 \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$\cos(\pi x) = \cos 0 = 1$$

$$\cos(\pi x) > \sin(x^2 - 2,57) \quad \text{при } x=0$$

$$x=1:$$

$$\sin(1^2 - 2,57) = \sin(-1,57) > -1 \quad (\text{т.к. } -1,57 \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$\cos(\pi x) = \cos \pi = -1$$

$$\sin(x^2 - 2,57) > \cos(\pi x) \quad \text{при } x=1$$

Значит корень находится на $(0; 1)$

$$\sin(x^2 - 2,57) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(x^2 - 2,57) - \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{x^2 - 2,57 - \pi x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{x^2 - 2,57 + \pi x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\left[\sin \frac{x^2 - \pi x - \frac{\pi}{2} - 2,57}{2} = 0 \quad (1) \right.$$

$$\cos \frac{x^2 + \pi x + \frac{\pi}{2} - 2,57}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \frac{x^2 - \pi x - \frac{\pi}{2} - 2,57}{2} = \pi k$$

$$x^2 - \pi x - \frac{\pi}{2} - 2,57 - 2\pi k = 0$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$0 < x = \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 8\pi k + 2,57 \cdot 4}}{2} < 1 \text{ (т.к. } x < 1)$$

$$\pi - 2 < \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 2,57 \cdot 4 + 8\pi k} < \pi$$

$$\pi^2 - 4\pi + 4 \stackrel{(1)}{<} \pi^2 + 2\pi + 2,57 \cdot 4 + 8\pi k \stackrel{(2)}{<} \pi^2$$

$$\textcircled{1} -8\pi k < 6\pi + 2,57 \cdot 4 - 4 = 6\pi + 1,57 \cdot 4 < 8\pi$$

$$k > -1$$

$$\textcircled{2} 2\pi + 2,57 \cdot 4 + 8\pi k < 0$$

$$k < \frac{-1}{4} - \frac{1,285}{\pi} < 0 \text{ - противоречие}$$

нам не подходят

$$(2) \frac{x^2 + \pi x + \frac{\pi}{2} - 2,57}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x + \pi x - \frac{\pi}{2} - 2,57 - 2\pi k = 0$$

$$x_0 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 2,57 \cdot 4 + 8\pi k}}{2}$$

Значит корни (1)

Заметим, что в случае (2) условия $\textcircled{1}$ и $\textcircled{2}$ должны выполняться с обратным знаком

$$\textcircled{1}^* k > -1$$

$$\textcircled{2}^* k \leq 0$$

Пусть $k = 0$

$$x_0 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 1,57 \cdot 4 + 4}}{2} = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 2 \cdot 3,14 + 4}}{2} >$$

$$< \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 2\pi + 4}}{2} = \frac{-\pi + \pi + 2}{2} = 1$$

$0 < x_0 < 1$. Т.к. все другие корни не попадают на интерв. $(0, 1)$ этот корень - наш.

Ответ: $x = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 2 \cdot 3,14 + 4}}{2}$

√4

Пусть стороны: a, b, c , а гипотенуза - d

$$a + b = 2020$$

$$b = 2020 - a$$

$$c = ab = a(2020 - a)$$

$$d = a(2020 - a) + 1 = ?$$

Заметим, что $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

$$a^2 + b^2 = (d - c)(d + c)$$

$$a^2 + (2020 - a)^2 = 1 \cdot (2(2020 - a)a + 1)$$

$$2a^2 + 2020^2 - 4040a = 4040a - 2a^2 + 1$$

$$4a^2 - 8080a + 2020^2 - 1 = 0$$

$$4a^2 - 8080a + (2019) \cdot (2021) = 0 \quad | : 4$$

$$a^2 - 2020a + 1009,5 \cdot 1010,5 = 0$$

По Т. Виета

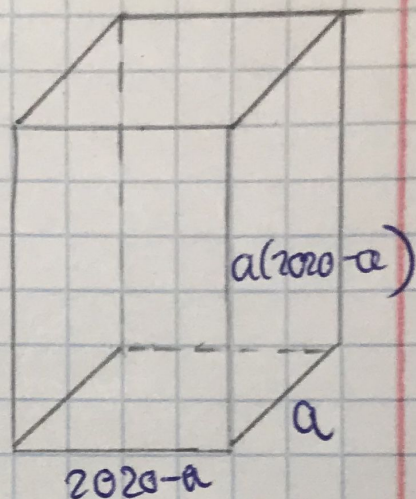
$$a = 1009,5$$

$$a = 1010,5$$

(при обоих a ответ один)

$$d = a(2020 - a) + 1 = 1009,5 \cdot 1010,5 + 1 = 1010^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= 1010^2 + \frac{3}{4} = \boxed{1020100 \frac{3}{4}} \quad \text{Ответ: } 1010^2 + \frac{3}{4}$$



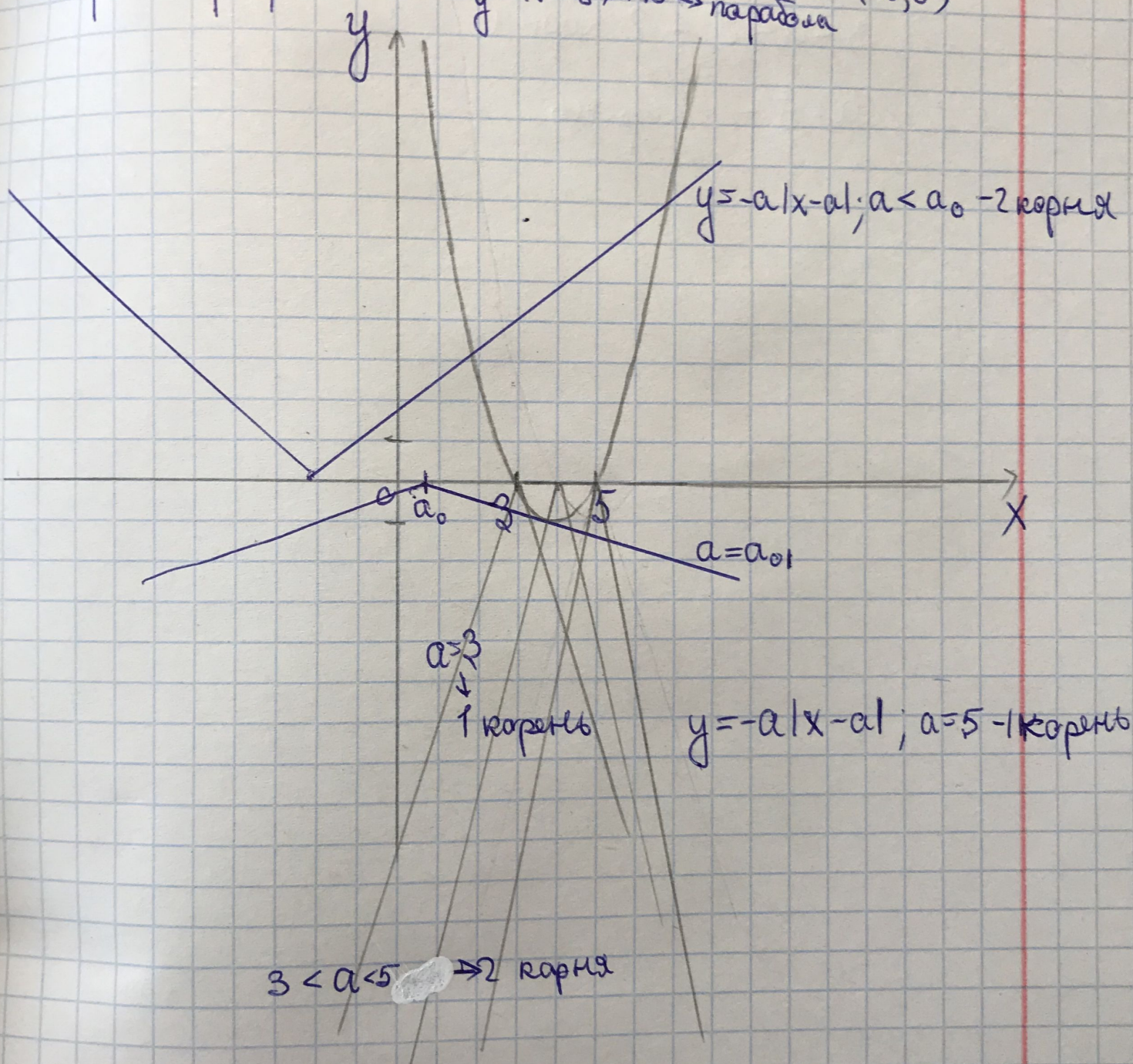
$\sqrt{5}$

$$x^2 + |x-a|a = 8x - 15$$

$$x^2 - 8x + 15 = -a|x-a|$$

Построим графики:

$y = -a|x-a|$ → заготовка состоящая из 2-х лучей с углами наклона $\pm a$ и "пиком" этой заготовки в т. $(a, 0)$
 $y = x^2 - 8x + 15$ → парабола



$$y = -a_0(x-a_0)$$

$$-a_0(x-a_0) = x^2 - 8x + 15 \text{ — один корень } D=0$$

$$x^2 + (a_0 - 8)x - (a_0^2 - 15) = 0 \quad D = 5a_0^2 - 16a_0 + 4; \quad a_0 = \frac{8 - 2\sqrt{11}}{5}$$

Ответ: $a < \frac{8-2\sqrt{11}}{5}$ — 2 корня

$a = \frac{8-2\sqrt{11}}{5}$ — 1 корень

$a = 3$ — 1 корень

$3 < a < 5$ — 2 корня

$a = 5$ — 1 корень