МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Евдокимов Евгений Дмитриевич**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ)\,?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-13)x^2 - (2a-9)x + a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Г*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Г*. Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1 Вар. 2

$$\frac{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3}{4} = 20 \qquad \frac{b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5}{4} = 180$$

$$b_1(1+q+q^2+q^3) = 80 \qquad b_1 q^2 (1+q+q^2+q^3) = 720$$

$$q^2 = 9 \quad q = \pm 3$$

Если $q=3$:

$$b_1(1+3+9+27) = 80 \quad 40b_1 = 80 \quad b_1 = 2 \qquad b_5 = b_1 q^4 = 162$$

Если $q=-3$:

$$b_1(1-3+9-27) = 80 \qquad -20b_1 = 80 \qquad b_1 = -4 \qquad b_5 = b_1 q^4 = -4 \cdot 81 = -324$$

Ответ: 162; −324.

№2 Вар. 2

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ) \qquad \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi x}{180} + 2\pi k \\ \pi x = \pi - \frac{\pi x}{180} + 2\pi n \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{179x}{180} = 2k \\ \frac{181x}{180} = 1 + 2n \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{360k}{179} \\ x = \frac{180+360n}{181} \end{array}\right.$$

Между ~~соседними~~ корнями в сериях $\frac{360}{179}$ и $\frac{360}{181}$ соответственно. Расстояние между корнями:

$$r = \frac{360k}{179} - \frac{180+360n}{181} = \frac{181 \cdot 360k - 180 \cdot 179 - 360 \cdot 179n}{179 \cdot 181} = \frac{180(181 \cdot 2k - 179 - 2 \cdot 179n)}{179 \cdot 181}$$

$$181 \cdot 2k - 179 - 2 \cdot 179n = 362k - 358n - 179$$

НОД(362; 358):

362	358
358	4
4	2
2	0

$$\begin{array}{r|l} 362 & 358 \\ -358 & 1 \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 358 & 4 \\ -32 & 89 \\ \hline 38 & \\ -36 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Итого НОД(362; 358) = 2, значит возможно $362k - 358n$ представить как любое число, кратное 2, а значит ~~минимум 362k − 358n − 179~~ наименьшее положительное и наибольшее отрицательное значение $362k - 358n - 179$ равно 1 и −1 соответственно, тогда наименьшее расстояние:

$$r_{min} = \frac{180}{179 \cdot 181}.$$

Ответ: $\frac{180}{179 \cdot 181}$

№3 Вар.2

Первый, второй, и третий углы: $\alpha, \beta; \gamma$.

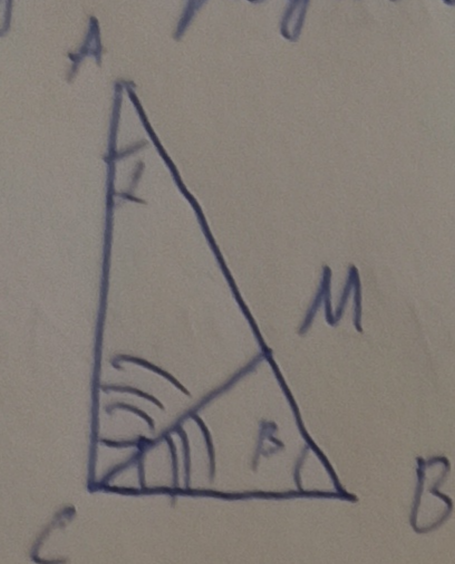
По условию: $2\alpha = \beta$.

Если третий угол γ больше в 3 раза любого из других, тогда γ в обоих случаях является наибольшим.

Если $\gamma = 3\alpha$:

$\alpha+\beta+\gamma = \pi \qquad \alpha + 2\alpha + 3\alpha = \pi \qquad \alpha = \frac{\pi}{6} \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$

Тогда треугольник прямоугольный с прямым углом γ:



Т.к. против большего угла лежит большая сторона, то: $AB = AC + 2\sqrt{2} \quad (\alpha < \beta < \gamma)$

CM – искомая биссектриса.

~~ΔACMB~~

$$AB\cos\alpha = AC = AB - 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}AB = AB - 2\sqrt{2} \qquad 2\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}AB$$

$$AB = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}(2+\sqrt{3}) \qquad BC = AB\sin\alpha = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$$

$$\angle CMB = \pi - \frac{\gamma}{2} - \beta = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{12\pi - 3\pi - 4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2\frac{\pi}{12}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \qquad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{BC}{\sin\angle CMB} = \frac{CM}{\sin\beta}$$

$$\frac{4BC}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{CM}{\sqrt{3}}$$

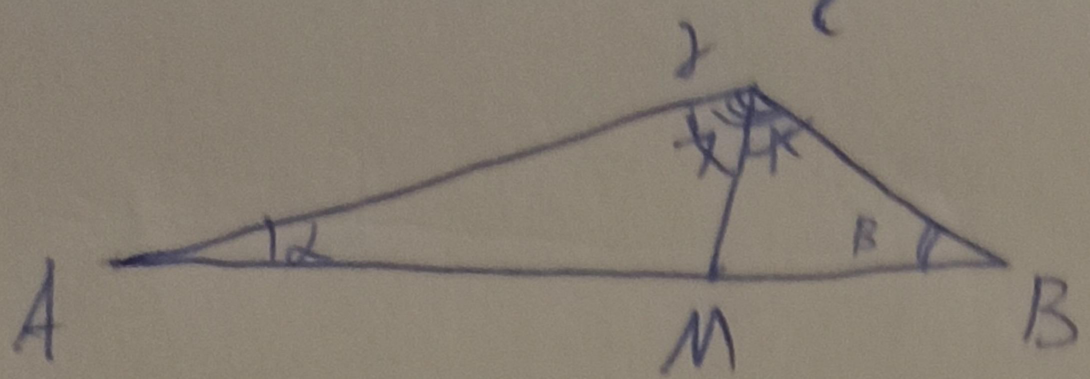
$$\frac{8\sqrt{2}(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = CM$$

$$CM = \frac{8\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3} = 2\sqrt{6}(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2(2+\sqrt{3})(6-2\sqrt{3}) =$$

$$= 2(12 - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6) = 2(6+2\sqrt{3}) = 12 + 4\sqrt{3}$$

Если $\gamma = 3\beta$:

$\gamma = 6\alpha \qquad \alpha+\beta+\gamma = \pi \qquad \alpha + 2\alpha + 6\alpha = \pi \qquad \alpha = \frac{\pi}{9} \quad \beta = \frac{2\pi}{9} \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}$



$\alpha < \beta < \gamma$, тогда:

$AB = AC + 2\sqrt{2}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC\,BC\cos\gamma = AC^2 + BC^2 + AC\cdot BC$

$AB^2 - AC^2 = BC^2 + AC\cdot BC$

$(AB - AC)(AB + AC) = BC^2 + AC\cdot BC$

$2\sqrt{2}\,(2AC + 2\sqrt{2}) = BC^2 + AC\cdot BC$

$4\sqrt{2}\,AC + 8 = BC^2 + AC\cdot BC$

$\cancel{BC^2 + AC\cdot BC - 4\sqrt{2}\,AC - 8 = 0}$

$\cancel{4\sqrt{2}\,AC}$ $(4\sqrt{2} - BC)\,AC = BC^2 - 8$

$AC = \dfrac{BC^2 - 8}{4\sqrt{2} - BC}$

(1) $AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2\,AC\cdot CM\cos\frac{\gamma}{2} = AC^2 + CM^2 - AC\cdot CM$

(2) $MB^2 = BC^2 + CM^2 - 2\,BC\cdot CM\cos\frac{\gamma}{2} = BC^2 + CM^2 - BC\,CM$

(1) $(AB - MB)^2 = AC^2 + CM^2 - 2\,AC\cdot CM\cos\frac{\gamma}{2} = AC^2 + CM^2 - AC\cdot CM$

$(AC - MB + 2\sqrt{2})^2 - AC^2 = CM^2 - AC\cdot CM$

$(2\sqrt{2} - MB)(2AC - MB + 2\sqrt{2}) = CM^2 - AC\cdot CM$

$\dfrac{AB}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{AC}{\sin\frac{2\pi}{9}}$ $\quad AC = \dfrac{2AB\sin\frac{2\pi}{9}}{\sqrt{3}} = AB - 2\sqrt{2}$

$\dfrac{AB\left(2\sin\frac{2\pi}{9} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{2}$

$AB = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2\sin\frac{2\pi}{9}}$ $\quad AC = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2\sin\frac{2\pi}{9}} - 2\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{9}}{\sqrt{3} - 2\sin\frac{2\pi}{9}}$

$\angle AMC = \pi - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{9}$

$\sin\frac{5\pi}{9}$

$\dfrac{CM}{\sin\frac{\pi}{9}} = \dfrac{AC}{\sin\frac{5\pi}{9}}$ $\quad CM = \dfrac{AC\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{5\pi}{9}} = \dfrac{4\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}}{\sqrt{3} - 2\sin\frac{2\pi}{9}} =$

$CM = \dfrac{\cancel{2}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{2\pi}{9}} =$

$= \dfrac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{5\pi}{9}}$

$CM = \dfrac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3} - 2\sin\frac{2\pi}{9}} = \dfrac{\left(2\cos\frac{\pi}{9} - 1\right)2\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 4\sin\frac{2\pi}{9}}$

Ответ: $12 + 4\sqrt{3}$ и $\dfrac{\left(2\cos\frac{\pi}{9} - 1\right)2\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 4\sin\frac{2\pi}{9}}$.

№3 вар.2

№4 вар.2

$3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1=0$

$3x^3-(a-1)x^2-(2a-9)x^2+3x^2-(2a-9)x+(a-1)=0$

$3x^2(1+x)+(a-1)(1-x^2)+(2a-9)x(1+x)=0$

Значит -1 – всегда корень уравнения при $\forall a$, и он целый

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3-(3a-13)x^2-(2a-9)x+a-1 & x+1 \\
\underline{3x^3+3x^2} & 3x^2+(10-3a)x+a-1 \\
\quad (10-3a)x^2-(2a-9)x & \\
\quad \underline{(10-3a)x^2+(10-3a)x} & \\
\qquad (a-1)x+(a-1) & \\
\qquad \underline{(a-1)x+(a-1)} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$3x^2+(10-3a)x+a-1=0$

$D=9a^2-60a+100-12a+12=9a^2-72a+112=9(a^2-8a+16-16)+112=$
$=9(a-4)^2-144+112=9(a-4)^2-32$

$a-4\in[-9;2]$, $\in \mathbb{Z}$

$(a-4)^2$	0	1	4	9	16	25	49	64	81
D	-32	-23	4	49	112	193	409	544	697

$27\cdot 27$: $189+54\ldots=729$

~~Квадратами являются~~ Дискриминанты являются квадратами при $a-4=\pm 2$ и $a-4=-3$, в остальных случаях корни иррациональны, или их не существует.

$a=6$, $a=2$, $a=1$

Если $a=6$: $3x^2-8x+5=0$

$D=4$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8-2}{6}=1 \\ x=\frac{5}{3} \end{array}\right.$ Условие выполнено

Если $a=2$: $3x^2+4x+1=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ Условие выполнено

Если $a=1$: $3x^2+7x=0$

$x(3x+7)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{7}{3} \end{array}\right.$ Условие выполнено

Всего целых a $6+5+1=12$, и удовлетворяют условию 3, тогда вероятность:

$P=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

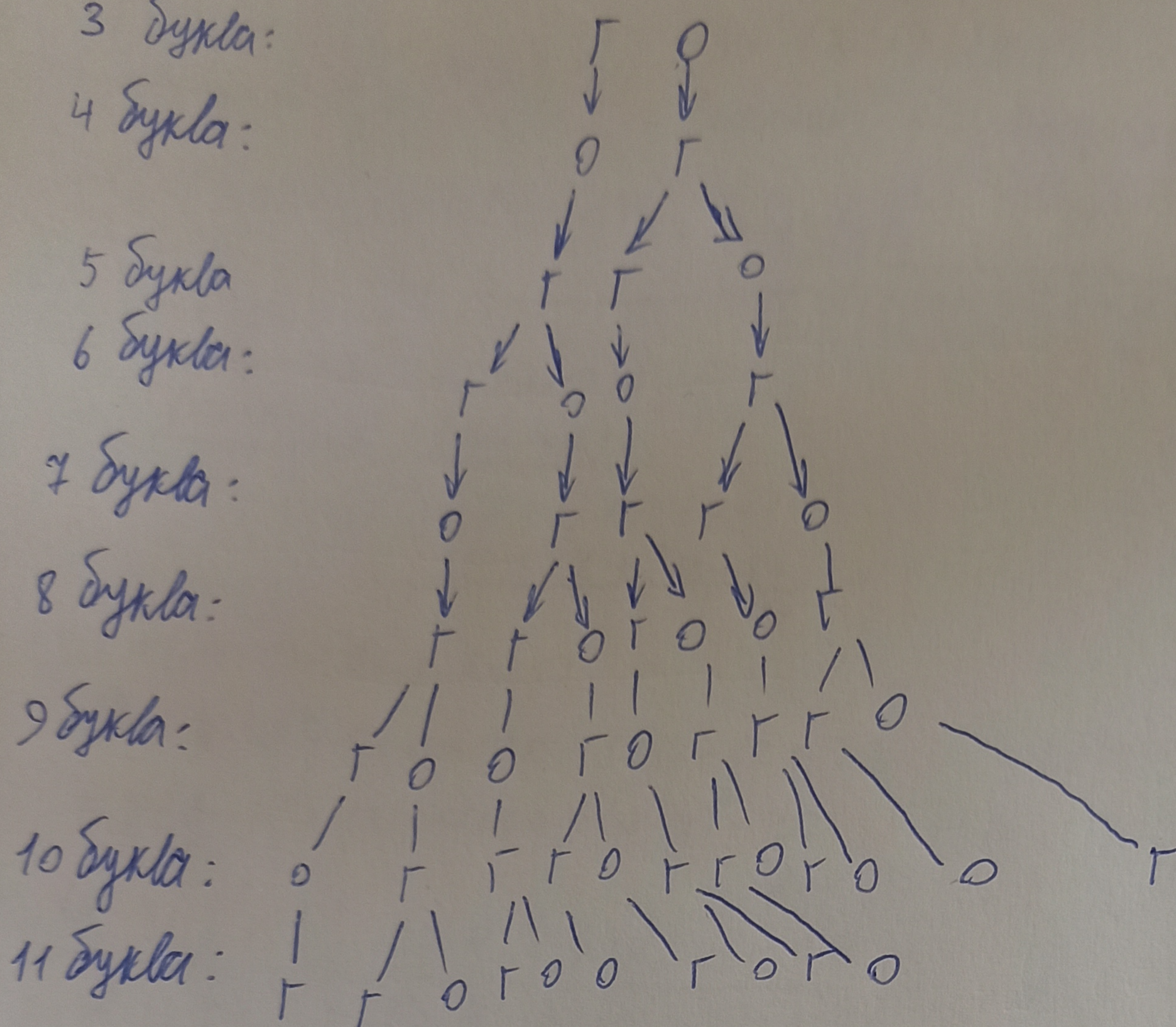
Ответ: $\frac{1}{4}$.

№4 Вар. 2

№5 Вар. 2

Если буква О есть и вначале и в конце, то вторая и 18-я буква – Г.

Последние
Предыдущие



Итого если последние 2 буквы: ГО → Г/О Г
ГГ → Г/Г О
ОГ – О/Г Г
ОГ → О/Г О

Последняя буква №

Посл. 2 б.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ГО	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37
ГГ	0	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	X
ОГ	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28
																65

16 и 17 буквой не могут быть Г и Г

Итого слов 65.

Ответ: 65.