МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мирошниченко Никита Игоревич**

Технический балл: **80**

Дата: **17 мая 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–1

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_k\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_2}$.

2. Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,57\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 8x - 15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

№1.

Дано:

$b_1 = 1$

$b_{b_2} = 10$

b_{b_3} – ?

Решение:

1) $b_{b_2} = b_1 + d(b_2 - 1)$ $\quad$ d-разность прогрессии

$b_{b_2} = b_1 + d(b_1 + d - 1)$

$10 = 1 + d^2$

$d^2 = 9$

$d = 3$ (d не может быть -3, т. к. прогрессия возрастающая)

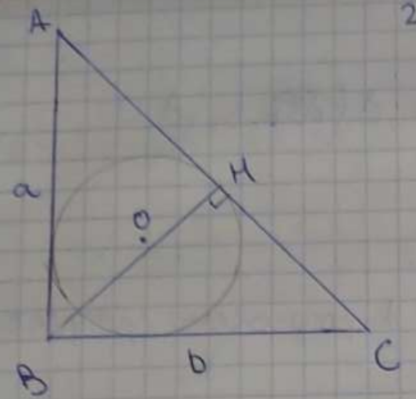
2) $b_{b_3} = b_1 + d \cdot (b_{b_3} - 1) = b_1 + d(b_1 + d(b_3 - 1) - 1) =$

$= b_1 + d(b_1 + d(b_1 + 2d - 1) - 1) =$

$= 1 + 3(1 + 18 - 1) = 55$

Ответ: 55

2.



Дано:

$\triangle ABC$ - прямоугольный

$\angle B = 90^\circ$

BH - высота

$AH = 16$

Окр. $(O; r)$ - вписанная в $\triangle ABC$

$r = 5$

Найти:

CH - ?

Решение:

$BC = b$

$AB = a$

$CH = x$

1) $BH = \sqrt{AH \cdot CH} = \sqrt{16x}$ (высота к гипотенузе)

$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{x^2 + 16x}$

$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{256 + 16x} = 4\sqrt{16 + x}$

2) $r = \frac{AB + BC - AC}{2}$ (радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности)

$10 = 4\sqrt{16+x} + \sqrt{x^2+16x} - 16 - x$

$x + 26 = 4\sqrt{16+x} + \sqrt{x^2+16x}$

$x^2 + 52x + 676 = 256 + 16x + x^2 + 16x +$
$+ 8\sqrt{(16+x)(x^2+16x)}$

$20x + 420 = 8(x+16) \cdot \sqrt{x}$

$(5x + 105)^2 = 4(x+16)^2 \cdot x$

$25x^2 + 1050x + 11025 = 4x^3 + 128x^2 + 1024x$

$4x^3 + 103x^2 - 26x - 11025 = 0$

$x = 9$ - корень

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 + 103x^2 - 26x - 11025 & x - 9 \\
\underline{4x^3 - 36x^2} & 4x^2 + 139x + 1225 \\
\quad 139x^2 - 26x - 11025 & \\
\quad \underline{139x^2 - 1251x} & \\
\quad\quad 1225x - 11025 & \\
\quad\quad \underline{1225x - 11025} & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

№ 3

$$\sin(x^2-2{,}57)=\cos(\pi x)$$

$$\sin(x^2-2{,}57)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2{,}57=\frac{\pi}{2}-\pi x+2\pi n \\ x^2-2{,}57=\pi-\frac{\pi}{2}+\pi x+2\pi n \end{array}\right.$$

В первом уравнении наименьший положительный корень при $n=0$

Во втором при $n=-1$

1) $x^2+\pi x-2{,}57-\frac{\pi}{2}=0$

$$D=\pi^2+2\pi+2{,}57\cdot 4$$

$$x_1=\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+2{,}57\cdot 4}}{2}$$

2) $x^2-\pi x+\frac{3\pi}{2}-2{,}57=0$

$$D=\pi^2-6\pi+2{,}57\cdot 4$$

$$x_2=\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+2{,}57\cdot 4}}{2}$$

Сравнивая x_1 и x_2 мы в конце концов получим, что $x_1<x_2$, т.к. $2{,}57<\frac{\pi}{2}+1$.

Ответ: $\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+2{,}57\cdot 4}}{2}$

№4.

Дано:

$a+b=2020$

$a\cdot b=c$

$d=c+1$

прямоугольный параллелепипед

d - диагональ параллелепипеда

Найти:

d - ?

Решение:

$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (диагональ прямоугольного параллелепипеда)

1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=c+1$

$a^2+b^2+c^2=c^2+2c+1$

$a^2+b^2-2c=1$

$a^2+b^2-2ab=1$ (по условию $a\cdot b=c$)

$(a-b)^2=1$

2) $\begin{cases}(a-b)^2=1\\ a+b=2020\end{cases}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-b=1\\ a+b=2020\end{cases}\\ \begin{cases}a-b=-1\\ a+b=2020\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{2021}{2}\\ b=\frac{2019}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{2019}{2}\\ b=\frac{2020}{2}\end{cases}\end{array}\right.$

3) $d=c+1=a\cdot b+1=\frac{2019\cdot 2020}{4}+1=$

$=505\cdot 2019+1=1019596$

Ответ: 1019596

$4x^2+139x+1225=0$

$D=139^2-16\cdot1225=139^2-4^2\cdot35^2=139^2-140^2$

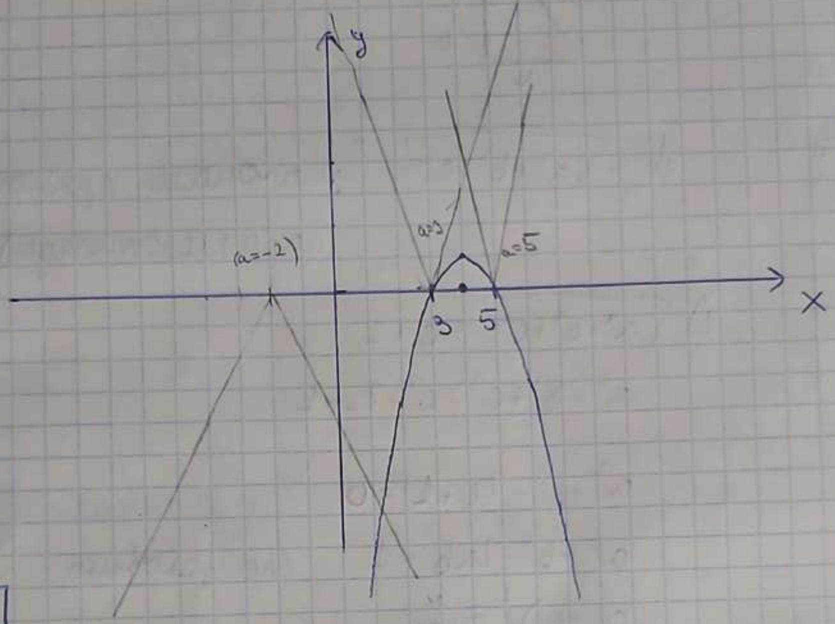
$D<0 \Rightarrow$ единственный корень $x=9$

Ответ: 9

5.

$x^2 + a|x-a| = 8x-15$

$a \cdot |x-a| = -x^2+8x-15$



$$\boxed{\begin{array}{l} -x^2+8x-15 \\ x_в. = 4 \\ y_в. = 1 \end{array}}$$

1) Рассмотрим случай, когда $a<0$

график $a \cdot |x-a|$ будет „галочка" ветвями вниз, правая ветвь которой пересекает параболу в двух точках

2) Рассмотрим случай, когда $a>0$

Теперь ветви „галочки" направлены вверх

а) Рассмотрим момент, когда „галочка" коснётся своей правой ветвью графика параболы

$a \cdot (x-a) = -x^2+8x-15$

$x^2+(a-8)x-a^2+15=0$

$D = a^2-16a+64+4a^2-60 = 5a^2-16a+4$

$5a^2-16a+4=0$ (т.к. касается)

$D=64-20=44$

$a_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{44}}{5}$

$x_{т.к.}$ (точки касания) $=\dfrac{8-a}{2}$ (т.к. $D=0$)

$x_{т.к.1}=\dfrac{8-a_1}{2}=\dfrac{40-(8+\sqrt{44})}{10}<3 \Rightarrow$ не подходит, т.к. пересечение в нижней полуплоскости

$x_{т.к.2}=\dfrac{8-a_2}{2}=\dfrac{40-(8-\sqrt{44})}{10}>3 \Rightarrow$ подходит

б) после того как „галочка" коснётся параболы, она какое-то время не будет иметь с ней общих точек, пока a не станет равно 3,

Т.к. один из корней квадратного уравнения $-x^2+8x-15$. И в этой точке будет 1 пересечение. Дальше будет 2 пересечения, т.к. (3) „галочка" внутри параболы. Это будет продолжаться до точки 5 (второй корень уравнения). Здесь тоже 1 пересечение.

в) при $a>5$ пересечений не будет

г) при $a=0$

Ответ: $a<\dfrac{8-\sqrt{44}}{5}$ и $a\in(3;5)$ 2 решения

$a=\dfrac{8-\sqrt{44}}{5}$; 3; 5 1 решение

$a\in\left(\dfrac{8-\sqrt{44}}{5};3\right)\cup(5;+\infty)$ 0 решений

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников „Покори Воробьевы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В. А. Садовничему
ученика 10 класса МБОУ „Гимназия" г. Обнинска
Мирошниченко Никиты Игоревича

апелляция.

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы 80 за мою работу заключительного этапа по Математике, поскольку считаю, что выполнил все задания верно и подробно описал решение

30.05.2020