Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!»

по математике

Задания заключительного этапа 2025/2026 учебного года для 9 классов

---

1. В 9:15 из пункта A вышел пешеход, а в 10:15 вслед за ним отправился велосипедист, который догнал пешехода в 10:30. В какой момент времени нужно было выехать велосипедисту из пункта A, чтобы догнать пешехода в 10:00? (Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.)

2. Известно, что 4001 – простое число. Найдите все натуральные n, при которых $n(n+4001)$ является квадратом натурального числа.

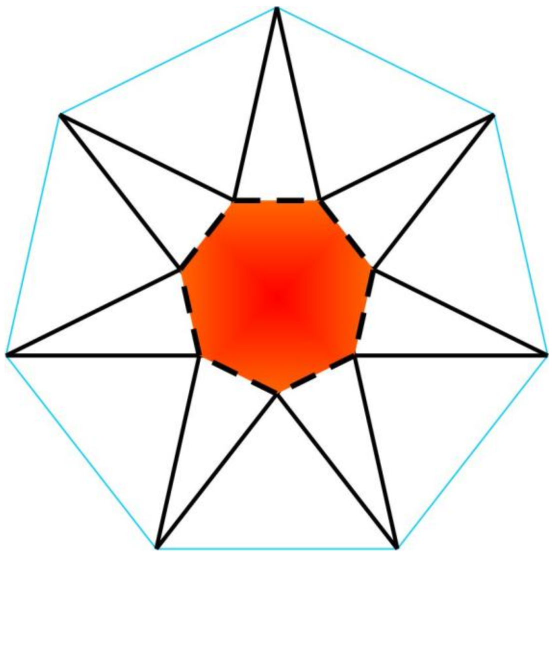
3. Будем обозначать $\text{Окр}(x)$ результат округления числа x до ближайшего целого по стандартным математическим правилам, например, $\text{Окр}(3{,}14)=3,\ \text{Окр}(2{,}71)=3,$ $\text{Окр}(4{,}5)=5$. Задана последовательность чисел $a_n = n + \text{Окр}(\sqrt{n}),\ n = 1, 2, \ldots$. Существует ли в этой последовательности участок, состоящий из 2026 последовательных натуральных чисел?

Если такого участка нет, в ответе укажите 0. Если такой участок существует, в ответе укажите наименьшее значение k, для которого $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+2025}$ являются последовательными натуральными числами.

4. На доске были написаны некоторые целые числа. На каждом шаге мы выбираем числа a и b и заменяем их на числа $5a-3b$ и $7a-5b$. Вначале на доске были записаны числа 15, 16, 17, …, 40. Можно ли через конечное число шагов получить на доске числа 2001, 2002, 2003, …, 2026?

5. В городской парк прибыли 49 волонтеров для уборки мусора. Они разбились на две группы, каждая группа собрала одинаковое количество мусора. Обе группы начали сбор мусора одновременно, но первая группа закончила на 1 час позже второй. Каждая группа делала перерыв на обед, известно, что во второй группе перерыв занял не менее 1 часа, но не более 1 ч. 20 мин. Если бы первая группа работала без перерыва, то она собрала бы в $1\frac{3}{4}$ раз больше мусора. Если бы вторая группа работала без перерыва, она собрала бы в $1\frac{2}{3}$ раз больше мусора. Сколько человек было в первой группе? Производительность всех волонтеров (количество собранного мусора в час) считать одинаковой.

6. В правильном семиугольнике провели самые длинные диагонали. Получившуюся семиугольную звёздочку вырезали и раскрасили, будто это ромашка (см. рис.). Потом белые лепестки согнули у основания по пунктирным линиям так, чтобы они накрывали центр. Найдите площадь множества всех точек, которые накрываются всеми лепестками одновременно. В ответе укажите отношение этой площади к площади изначального семиугольника.



Ответы и решения

1. Ответ: в 9:51.

Решение. К моменту времени 10:30 они преодолели одинаковое расстояние, при этом пешеход шел 75 минут, а велосипедист ехал 15 минут. Значит, скорость велосипедиста в 5 раза выше.

К моменту времени 10:00 пешеход находится в пути 45 минут. Значит, чтобы его догнать, велосипедисту нужно 45 : 5 = 9 минут, то есть он должен выехать в 9:51.

2. Ответ: n = 4 000 000.

Решение. Обозначим $p = 4001$, $m^2 = n \cdot (n + p) \Rightarrow m^2 - n^2 = pn$.

Рассмотрим два случая:

а) $m - n \,⋮\, p \Rightarrow m = n + ap$.

Подставим в уравнение $ap(2n + ap) = pn \Rightarrow\ a(2n + ap) = n$. Но левая часть $a(2n + ap) > n$. Противоречие.

б) $m + n \,⋮\, p \Rightarrow m = ap - n$.

Подставим в уравнение $ap(ap - 2n) = pn \Rightarrow\ a(ap - 2n) = n$.

Следовательно, $n \,⋮\, a$, обозначим $n = ab$ и подставим: $a^2p - 2a^2b = ab \Rightarrow ap - 2ab - b = 0$. Умножим на два и прибавим p к обеим частям $2ap - 4ab - 2b + p\ = p \Rightarrow 2a(p - 2b) + (p - 2b) = p \Rightarrow (2a + 1)(p - 2b) = p$. Один из сомножителей должен быть равен p, но $p - 2b < p$, следовательно $2a + 1 = p$, $p - 2b = 1 \Rightarrow a = b = \frac{p-1}{2}$.

Значит, $n = \frac{(p-1)^2}{4}$, $m = \frac{p^2-1}{4}$. Подставив $p = 4001$, получаем ответ.

3. Ответ: 1025157.

Решение. Заметим, что a_k будут последовательными натуральными числами, если не меняется Окр$(\sqrt{n})$, т.е. когда $n \in [(m - 0.5)^2\ ;\ (m + 0.5)^2) = [m^2 - m + 0.25; m^2 + m + 0.25)$.

Этот интервал содержит целые числа от $m^2 - m + 1$ до $m^2 + m$, всего $2m$ чисел. Чтобы поместилось 2026 чисел, решим неравенство $2m \geq\ 2026 \Rightarrow m \geq 1013$. Поскольку надо найти наименьшее k, то возьмем $k = 1013^2 - 1013 + 1 = 1000^2 + 2 \cdot 13 \cdot 1000 + 13^2 - 1012 = 1025157$.

4. Ответ: Нет.

Решение. Легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

- Если a и b кратны 5, то и $a' = 5a - 3b$, и $b' = 7a - 5b$ – оба кратны 5.

- Если среди чисел a и b только одно кратно 5, то и среди чисел a' и b' только одно кратно 5.
- Если среди чисел a и b нет кратных 5, то и среди чисел a' и b' нет кратных 5.

Но, поскольку в последовательности 15, 16, 17, …, 40 имеется 6 чисел кратных 5, а в последовательности 2001, 2002, 2003, …, 2026 всего только 5 чисел кратных 5, то это невозможно.

5. Ответ: 21 человек.

Решение. Обозначим за n количество людей в первой группе, тогда во второй будет $49 - n$.

Обозначим за t время работы второй группы, тогда время работы первой равно $t + 1$.

Пусть $p_1,\ p_2$ – длительность перерыва в 1-й и 2-й группе, соответственно.

Запишем систему:

$$\begin{cases} n(t+1-p_1) = (49-n)(t-p_2) \\ \dfrac{t+1}{t+1-p_1} = \dfrac{7}{4} \\ \dfrac{t}{t-p_2} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения $p_1 = \frac{3}{7}(t+1)$, из третьего $p_2 = \frac{2}{5}t$ и подставив в первое уравнение, получим:

$$n\left(t+1-\frac{3}{7}(t+1)\right) = (49-n)(t-\frac{2}{5}t)$$

$$n\left(\frac{4}{7}(t+1)\right) = \frac{(49-n)3t}{5}$$

$$\frac{\frac{20}{21}(t+1)}{t} = \frac{49-n}{n}$$

$$\frac{20}{21}\left(1+\frac{1}{t}\right) = \frac{49}{n} - 1$$

Далее заметим, что

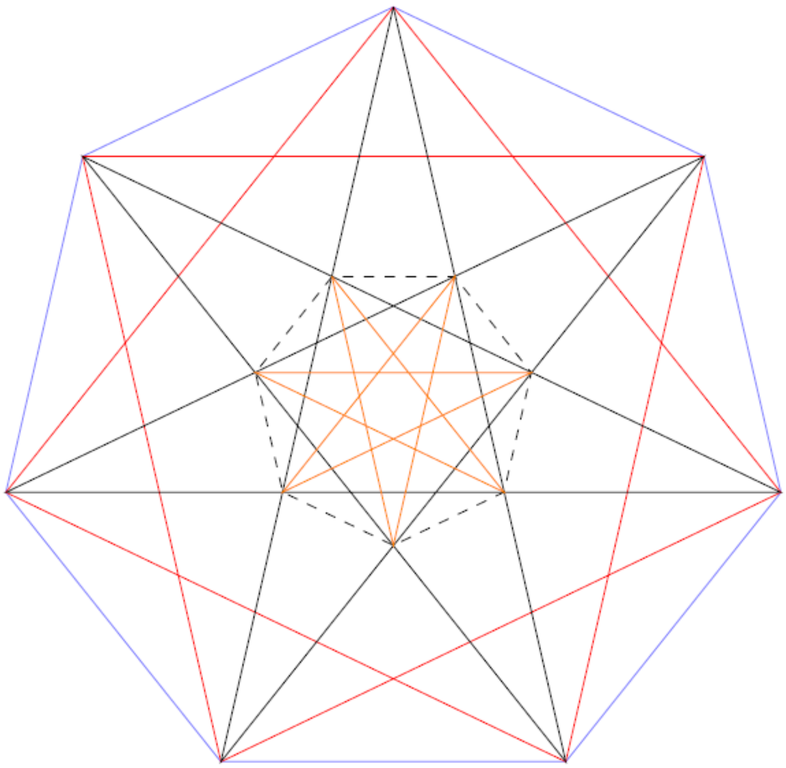
$$p_2 \in \left[1, \frac{80}{60}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{5}{2}; \frac{10}{3}\right] \Rightarrow 1 + \frac{1}{t} \in \left[\frac{13}{10}; \frac{7}{5}\right] \Rightarrow \frac{20}{21}\left(1+\frac{1}{t}\right) \in \left[\frac{26}{21}; \frac{28}{21}\right].$$

$$\text{Поэтому } \frac{49}{n} \in \left[\frac{47}{21}; \frac{49}{21}\right] \Rightarrow n \in \left[21\,; \frac{49 \cdot 21}{47}\right].$$

Так как $\frac{49 \cdot 21}{47} = 47 \cdot \frac{21}{47} + \frac{2 \cdot 21}{47} = 21 + \frac{42}{47} < 22$, то $n\ = 21$.

6. Ответ: $\dfrac{\cos^4\frac{3\pi}{7}}{\cos^2\frac{2\pi}{7}\cdot\cos^2\frac{\pi}{7}}$.

Решение. Сначала нужно разобраться, какая фигура получится. Красным проведём оставшиеся диагонали. Пунктиром обозначим места сгиба. В пунктирном семиугольнике тоже проведём диагонали, их пометим оранжевым цветом.



Сумма углов семиугольника равна $7 \cdot \pi - 2\pi = 5\pi$. Значит, угол при вершине семиугольника равен $\frac{5}{7}\pi$. Угол делится диагоналями на 5 частей, и они на самом деле равные, так как если вписать семиугольник в окружность, то эти острые углы будут опираться на одинаковые по длине хорды (стороны семиугольника). Значит, угол в вершине луча равен $\frac{\pi}{7}$, следовательно, можно найти углы при основании (пунктирном) равнобедренного треугольника, являющегося «лучём» звезды. Эти углы равны $\frac{\pi - \frac{\pi}{7}}{2} = \frac{3}{7}\pi$.

Но такой же угол получается мужду пунктиром и оранжевой диагональю маленького семиугольника. Оказывается, при складывании вершина «луча» звезды попадает ровно в вершину пунктирного семиугольника, и после складывания черные стороны лучей звезды лягут ровно на оранжевые диагонали.

Значит, нужно узнать площадь самого маленького семиугольника. Достаточно узнать, во сколько раз его сторона меньше стороны изначального семиугольника, а площади будут относиться как этот коэффициент, возведённый в квадрат.

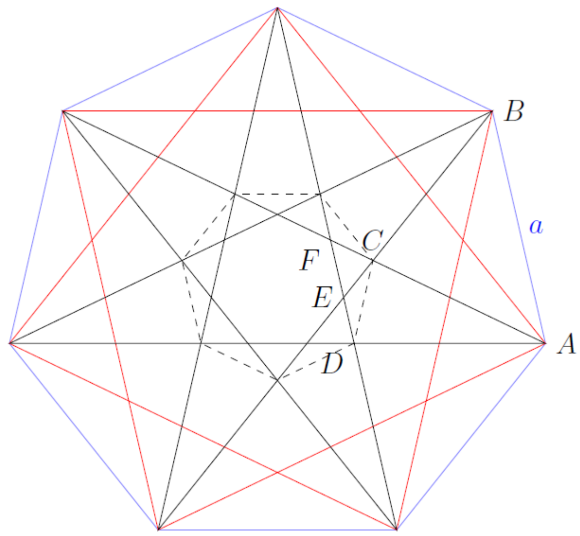
Пусть сторона синего семиугольника $AB = a$.

Несложно найти, что $\angle BAC = \frac{2\pi}{7}, \angle ACD = \frac{3\pi}{7}, \angle ECD = \frac{\pi}{7}$.

Тогда

$$AC = \frac{a}{2\cos\frac{2\pi}{7}};\ CD = 2AC\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}} \cdot a.$$

Найдём длину стороны CE через подобие треугольников ABC и CFE. Во сколько раз CF короче AC — во столько раз FE короче AB.



$$CF = CE = \frac{CD}{2 \cdot \cos\frac{\pi}{7}} = \frac{a\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}},$$

когда

$$AC = \frac{a}{2\cos\frac{2\pi}{7}}.$$

Получается, что CF короче AC в $\frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}$ раз.

Заметим, что сторона маленького оранжевого семиугольника относится к стороне пунктирного так же, как сторона FE относится к стороне a.

Это значит, что сторона маленького оранжевого семиугольника меньше стороны a в

$$\frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}} \cdot \frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}} \text{ раз.}$$

Для площади этот коэффициент нужно взять в квадрате. Следовательно, ответ равен

$$\frac{\cos^4\frac{3\pi}{7}}{\cos^2\frac{2\pi}{7} \cdot \cos^2\frac{\pi}{7}}.$$

Возможны другие пути решения, например, использующие теорему синусов. Возможны альтернативные формы записи ответа. В частности, следующие:

$$\frac{\cos^4\frac{3\pi}{7}}{\cos^2\frac{2\pi}{7} \cdot \cos^2\frac{\pi}{7}} = 64\sin^6\frac{\pi}{14} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{14}}{\cos^2\frac{\pi}{7}\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}\right)^2} = \frac{\cos^2\frac{3\pi}{7}}{\cos^2\frac{\pi}{7}\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}\right)^2}.$$